

# AUTOVALORES COMPLEJOS EN SISTEMAS CUANTICOS INESTABLES

**R. M. Id Betan, R. Laura**

Departamento de Física. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario  
Av. Pellegrini 250 - (2000) - Rosario - Santa Fe - Argentina

e-mail: idbetan@ifir.ifir.edu.ar

e-mail: laura@ifir.ifir.edu.ar

En procesos de decaimiento y en Mecánica Estadística fuera del equilibrio es posible partir de un sistema "libre" donde el generador de la evolución temporal (Hamiltoniano o Liouvilliano) tiene espectro discreto y continuo superpuestos. Si se desea que el espectro con interacción se reduzca al espectro "libre" cuando la interacción tiende a cero, es necesario que aparezcan autovectores generalizados con autovalores complejos (vectores de Gamov). Presentamos un algoritmo perturbativo para obtener estas descomposiciones espectrales, y calcular en forma sistemática las vidas medias de estados inestables y su desviación del comportamiento exponencial. Se discute la utilidad de las descomposiciones espectrales generalizadas y la interpretación física de los "estados" con energía compleja.

In any decaying process of Statistical Mechanics out of equilibrium, it is possible to begin with a "free" system, where the time evolution would have a discrete plus continuous spectrum. If we would like that the spectrum of the system with interactions would become the "free" spectrum where the interaction vanishes, generalized eigenvector (Gamov Vector) with complex eigenvalues necessarily appear. We present a perturbative algorithm to obtain the spectral expansion, systematically compute the mean life of the unstable state, and its divergence from the exponential behavior. The use of generalized spectral expansion and the interpretation of "state" with complex energy is discussed.

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de decaimiento, en Mecánica Cuántica, es usualmente descrito por un Hamiltoniano de la forma  $H = H_{libre} + H_{int} = H_d + H_c + H_{int}$ , donde  $H_d$  posee un espectro discreto embebido en el espectro continuo de  $H_c$  mientras  $H$  tiene un espectro puramente continuo.

Un prototipo de sistema de decaimiento es descrito por el modelo de Friedrichs:

$$H = m|m\rangle\langle m| + \int_0^{\infty} d\omega \omega |\omega\rangle\langle\omega| + \int_0^{\infty} d\omega V_{\omega} \{ |\omega\rangle\langle m| + |m\rangle\langle\omega| \} \quad m \in R^-, V_{\omega} = \bar{V}_{\omega}$$

Es posible definir condiciones sobre la interacción  $V_{\omega}$  de modo que el espectro de  $H$  sea  $R^+$ . En este caso el autovalor discreto de  $m$  es eliminado por la interacción. El problema de autovectores puede ser resuelto analíticamente, encontrándose un sistema biortogonal completo de autovectores por derecha y por izquierda del Hamiltoniano del sistema, que puede escribirse en la forma  $H = \int_0^{\infty} d\omega |\omega^+\rangle\langle\omega^+|$ . Cuando la interacción  $V_{\omega}$

tiende a cero los autovectores generalizados  $|\omega^+\rangle$  tienden a  $|\omega\rangle$ , pero el autovector discreto  $|m\rangle$  no es recuperado.

Sudarshan et. al.<sup>(3)</sup> obtuvieron una descomposición espectral generalizada del modelo de Friedrichs sustituyendo las integrales sobre  $R^+$  por integrales sobre una curva  $\Gamma$  en la mitad inferior del plano complejo. El Hamiltoniano extendido  $H_{\Gamma}$  tiene significado como generador de la evolución temporal de vectores  $\Phi$  para los

cuales  $\langle\omega|\Phi\rangle$  tiene una extensión analítica a la mitad inferior del plano complejo. Sudarshan obtuvo para el espectro de  $H_{\Gamma}$  la curva  $\Gamma$  y un punto  $z_0$  ubicado entre  $R^+$  y  $\Gamma$ . Cuando la interacción tiende a cero el autovalor  $z_0$  de  $H_{\Gamma}$  tiende a  $m$ , recobrando, de este modo la parte discreta del espectro de  $H_{libre}$  (ver también referencia<sup>(2)</sup>). T. Petrosky, I. Prigogine and S. Tasaki<sup>(4)</sup> obtuvieron la misma descomposición espectral con un algoritmo perturbativo y utilizando una "regla de ordenamiento temporal", que consiste en agregar una pequeña parte imaginaria al denominador para evitar las resonancias; dependiendo el signo de la parte imaginaria de la transición involucrada.

En este trabajo usamos un algoritmo perturbativo con ciertas propiedades de analiticidad, de modo que sea válido deformar las integrales sobre  $R^+$  en integrales sobre una curva  $\Gamma$  en la mitad inferior del plano complejo, eliminando así los denominadores que involucran diferencias entre autovalores discreto y continuo del Hamiltoniano libre.

En la sección II describimos el sistema cuántico sobre el que se desarrollará el algoritmo perturbativo. En la sección III desarrollamos el algoritmo perturbativo, calculando un conjunto completo de autovectores generalizados por derecha e izquierda, y discutimos la función del autovalor complejo para la expresión aproximada del proceso de decaimiento. En la sección IV, se aplica el método al modelo de Friedrichs y se compara con la solución exacta de la referencia<sup>(3)</sup>. En las conclusiones de la sección V resumimos los resultados y discutimos la interpretación de la descomposición espectral generalizada.

## II. EL SISTEMA

Consideremos un Hamiltoniano de la forma descrita en la introducción, donde el Hamiltoniano discreto tiene un solo autovector, y el espectro del Hamiltoniano continuo consta del semieje real positivo. Mientras el Hamiltoniano de interacción involucra términos de interacción entre estados del continuo con el discreto e interacción entre estados del continuo:

$$H = H^0 + H^1$$

$$H^0 \equiv H_{\text{libre}} \equiv m|m\rangle\langle m| + \int_0^\infty d\omega \omega |\omega\rangle\langle \omega| \quad m \in R^+,$$

$$H^1 \equiv H_{\text{int}} \equiv \int_0^\infty d\omega V_\omega |\omega\rangle\langle m| + \int_0^\infty d\omega \bar{V}_\omega |m\rangle\langle \omega| +$$

$$+ \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' V_{\omega\omega'} |\omega\rangle\langle \omega'|, \quad V_{\omega\omega'} = \bar{V}_{\omega'\omega}, \quad V_{\omega\omega\omega'} = \bar{V}_{\omega'\omega\omega}$$
(1)

donde los autovectores generalizados por derecha (izquierda)  $|m\rangle$  y  $|\omega\rangle$  ( $\langle m|$  y  $\langle \omega|$ ) de  $H^0$  forman un conjunto completo biortonormal para expandir cualquier vector  $|\Phi\rangle$ ,

$$\langle m|m\rangle = 1, \quad \langle \omega|\omega'\rangle = \delta(\omega - \omega'), \quad \langle m|\omega\rangle = \langle \omega|m\rangle = 0$$

$$|\Phi\rangle = |m\rangle\langle m|\Phi\rangle + \int_0^\infty d\omega |\omega\rangle\langle \omega|\Phi\rangle.$$
(2)

La amplitud de un vector  $\Phi$  de ser observado en el vector  $\Psi$  está dado por la siguiente expresión

$$\langle \Psi|\Phi\rangle = \langle \Psi|m\rangle\langle m|\Phi\rangle + \int_0^\infty d\omega \langle \Psi|\omega\rangle\langle \omega|\Phi\rangle, \quad (3)$$

de modo que tenemos la siguiente realización espectral para la identidad

$$\langle \Psi|\Phi\rangle = \langle \Psi|I|\Phi\rangle \quad I \equiv |m\rangle\langle m| + \int_0^\infty d\omega |\omega\rangle\langle \omega|.$$

La resolvente  $\hat{R}(z) = (\hat{H} - z)^{-1}$  tiene un polo si  $z=m \in R^+$  y un corte si  $z \in R^+$ . Si intentásemos construir un conjunto biortonormal completo de autovectores del Hamiltoniano  $H = H^0 + H^1$ , de modo que dependa en forma analítica de un pequeño parámetro de interacción, el método standard de la teoría perturbativa no es aplicable, debido a la superposición de la parte discreta y continua de  $H^0$ , lo cual produce términos indefinidos en la expansión perturbativa. Este problema puede ser evitado si nuestro objetivo es sólo obtener información de alguna de las expresiones  $\langle \Psi|\Phi\rangle$ ,  $\langle \Psi|H|\Phi\rangle$  ó  $\langle \Psi|e^{-iHt}|\Phi\rangle$ , para el caso en que  $\varphi(\omega) = \langle \omega|\Phi\rangle$  ( $\psi(\omega) = \langle \omega|\Psi\rangle$ ) tiene extensión analítica  $\varphi(z)$  ( $\psi(z)$ ) bien definida en la mitad inferior (superior) del plano complejo. Para esta clase de vectores definimos los funcionales  $\langle z|$  y  $|z\rangle$  por las siguientes expresiones <sup>(1)</sup>

$$\langle z|\Phi\rangle \equiv \varphi(z), \quad \langle z|\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2\rangle = \alpha\langle z|\Phi_1\rangle + \beta\langle z|\Phi_2\rangle$$

$$\langle \Psi|z\rangle \equiv \bar{\psi}(z), \quad \langle \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2|z\rangle = \bar{\alpha}\langle \Psi_1|z\rangle + \bar{\beta}\langle \Psi_2|z\rangle$$

Utilizando el teorema de Cauchy podemos transformar la integral sobre el semieje real positivo de la ecuación (3) en una integral sobre una curva  $\Gamma$  en el semiplano complejo inferior

$$\langle \Psi|\Phi\rangle = \langle \Psi|m\rangle\langle m|\Phi\rangle + \int_\Gamma dz \langle \Psi|z\rangle\langle z|\Phi\rangle, \quad (4)$$

La curva  $\Gamma$  se obtiene deformando el semieje real positivo hacia el semiplano inferior complejo. Entonces para vectores con las propiedades de analiticidad mencionadas, podemos definir la siguiente descomposición del "operador identidad"  $I_\Gamma$

$$I_\Gamma \equiv |m\rangle\langle m| + \int_\Gamma dz |z\rangle\langle z|, \quad \langle \Psi|\Phi\rangle = \langle \Psi|I_\Gamma|\Phi\rangle$$

Los funcionales  $|m\rangle$ ,  $\langle m|$ ,  $|z\rangle$  y  $\langle z|$  satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\langle m|m\rangle = 1, \quad \langle z|z\rangle = \delta_\Gamma(z - z'), \quad \langle m|z\rangle = \langle z|m\rangle = 0, \quad (5)$$

donde la distribución  $\delta_\Gamma(z - z')$  está definida sobre la curva  $\Gamma$  ( $\int_\Gamma dz' \delta_\Gamma(z - z') f(z') = f(z)$ ). Podemos obtener descomposiciones espectrales para  $H^0$  y  $H^1$  en función de los nuevos funcionales a través de las siguientes definiciones

$$H^0_\Gamma \equiv |m\rangle\langle m| + \int_\Gamma dz z |z\rangle\langle z|, \quad (6)$$

$$H^1_\Gamma \equiv \int_\Gamma dz V_z |z\rangle\langle m| + \int_\Gamma dz \bar{V}_z |m\rangle\langle z| + \int_\Gamma dz \int_\Gamma dz' V_{zz'} |z\rangle\langle z'|,$$

donde  $V_z$ ,  $\bar{V}_z$  y  $V_{zz'}$  son las extensiones analíticas al semiplano inferior complejo de  $V_\omega$ ,  $\bar{V}_\omega$  y  $V_{\omega\omega'}$ . Los operadores  $H^0_\Gamma$  y  $H^1_\Gamma$  verifican las relaciones  $\langle \Psi|H^0_\Gamma|\Phi\rangle = \langle \Psi|H^0|\Phi\rangle$  y  $\langle \Psi|H^1_\Gamma|\Phi\rangle = \langle \Psi|H^1|\Phi\rangle$  para la clase restringida de vectores definida anteriormente. La resolvente  $\hat{R}_\Gamma(z) \equiv (\hat{H}_\Gamma - z)^{-1}$  tiene un polo en  $z=m$  y un corte en  $z \in \Gamma$ . Al mover la curva de integración al semiplano inferior complejo se eliminó la superposición entre la parte discreta del espectro de  $H^0$  y su parte continua.  $H^0_\Gamma$  tiene un autovalor discreto  $m$  real y un espectro continuo  $z \in \Gamma$ .

## III. MÉTODO PERTURBATIVO

En esta sección procedemos con la formulación del algoritmo perturbativo para resolver el problema de autovalores por derecha  $H_\Gamma|\Phi\rangle = \lambda|\Phi\rangle$ . Asumiendo que existe una expansión en serie para los autovectores y autovalores, con respecto a un pequeño parámetro de interacción, escribimos

$$|\Phi\rangle = |^0\Phi\rangle + |^1\Phi\rangle + |^2\Phi\rangle + \dots, \quad \lambda = \lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 + \dots$$

Sustituyendo este desarrollo en la ecuación de autovalores obtenemos las ecuaciones

$$\left( \overset{0}{\lambda} - \overset{0}{H}_\Gamma \right) | \overset{0}{\Phi} \rangle = 0 \quad (7)$$

$$\left( \overset{0}{\lambda} - \overset{0}{H}_\Gamma \right) | \overset{1}{\Phi} \rangle = \left( \overset{1}{H}_\Gamma - \overset{1}{\lambda} \right) | \overset{0}{\Phi} \rangle \quad (8)$$

$$\left( \overset{0}{\lambda} - \overset{0}{H}_\Gamma \right) | \overset{2}{\Phi} \rangle = \left( \overset{1}{H}_\Gamma - \overset{1}{\lambda} \right) | \overset{1}{\Phi} \rangle - \overset{2}{\lambda} | \overset{0}{\Phi} \rangle \quad (9)$$

$$\left( \overset{0}{\lambda} - \overset{0}{H}_\Gamma \right) | \overset{n}{\Phi} \rangle = \left( \overset{1}{H}_\Gamma - \overset{1}{\lambda} \right) | \overset{n-1}{\Phi} \rangle - \overset{2}{\lambda} | \overset{n-2}{\Phi} \rangle - \dots - \overset{n}{\lambda} | \overset{0}{\Phi} \rangle \quad (10)$$

Planteando el problema de autovalores por izquierda  $\langle \Psi | H_\Gamma = \lambda \langle \Psi |$ , obtendremos ecuaciones análogas.

Definimos los proyectores  $P_d$  y  $P_\Gamma$ , y el operador  $P_z$ , a través de las siguientes relaciones

$$P_d \equiv |m\rangle \langle m|, \quad P_\Gamma \equiv \int dz |z\rangle \langle z|, \quad P_z \equiv |z\rangle \langle z| \quad (11)$$

Estos proyectores verifican las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} P_d + P_\Gamma &= I_\Gamma, \quad P_d P_d = P_d, \quad P_\Gamma P_\Gamma = P_\Gamma, \\ P_z P_z &= \delta_\Gamma(z - z'), \\ P_d P_\Gamma &= P_\Gamma P_d = 0, \quad P_d \overset{0}{H}_\Gamma = \overset{0}{H}_\Gamma P_d = m P_d, \\ P_\Gamma \overset{0}{H}_\Gamma &= \overset{0}{H}_\Gamma P_\Gamma, \quad P_z \overset{0}{H}_\Gamma = \overset{0}{H}_\Gamma P_z = z P_z \end{aligned} \quad (12)$$

### Perturbación del Espectro Discreto.

Determinemos, en primer lugar, los autovalores y autovectores de  $H_\Gamma$  que resultan de perturbar el autovalor  $m$ . Para que se verifique la ecuación (7) debe ser  $| \overset{0}{\Phi} \rangle = |m\rangle$  y  $\overset{0}{\lambda} = m$ . Proyectando la ecuación (8) sobre el operador identidad  $I_\Gamma = P_d + P_\Gamma$ , se obtiene el valor para la corrección de primer orden del autovalor y de la proyección  $P_\Gamma$  del autovector

$$\overset{1}{\lambda} = 0, \quad P_\Gamma | \overset{1}{\Phi} \rangle = (m - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_\Gamma \overset{1}{H}_\Gamma |m\rangle.$$

Operando en forma equivalente sobre la ecuación (9) se obtiene la siguiente corrección a segundo orden del autovalor, y la proyección sobre el subespacio  $P_\Gamma$

$$\overset{2}{\lambda} = \langle m | \overset{1}{H}_\Gamma | \overset{1}{\Phi} \rangle, \quad P_\Gamma | \overset{2}{\Phi} \rangle = (m - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_\Gamma \overset{1}{H}_\Gamma | \overset{1}{\Phi} \rangle.$$

Del desarrollo anterior no se obtiene información respecto a las componentes  $\langle m | \overset{n}{\Phi} \rangle$  ( $n=1,2,\dots$ ). Imponemos la condición usual  $\langle m | \overset{n}{\Phi} \rangle = 0$  ( $n=1,2,\dots$ ), lo cual fija la normalización. Luego, podemos expresar

$$\begin{aligned} | \overset{0}{\Phi}_m \rangle &= |m\rangle + (m - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_\Gamma \overset{1}{H}_\Gamma |m\rangle + \\ &+ \left( (m - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_\Gamma \overset{1}{H}_\Gamma \right)^2 |m\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\overset{0}{\lambda}_m = m + \langle m | \overset{1}{H}_\Gamma (m - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_\Gamma \overset{1}{H}_\Gamma |m\rangle.$$

Usando las expresiones para  $\overset{0}{H}_\Gamma$  y  $\overset{1}{H}_\Gamma$  dadas en las expresiones (6), asumiendo que  $V_z$  y  $\overline{V_z}$  son funciones

analíticas de  $z$  en el semiplano inferior y llevando la curva  $\Gamma$  al semieje real positivo  $R^+$  obtenemos

$$\begin{aligned} \overset{0}{\lambda}_m &= m + \int_0^\infty d\omega \frac{V_\omega \overline{V_\omega}}{m - \omega + i0} = \\ &= m + \int_0^\infty d\omega P \left( \frac{1}{\omega - m} \right) |V_\omega|^2 - i\pi |V_\omega|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Así, la perturbación del autovalor  $m > 0$  a segundo orden tiene una componente real y una componente imaginaria negativa. Esta última contribuye con un coeficiente que decrece exponencialmente en la evolución del estado discreto. Notemos que si el estado discreto no está embebido en el continuo la parte imaginaria de  $\overset{0}{\lambda}_m$  no está presente, pues  $\delta(\omega - m) = 0$ , para  $m < 0$  y  $\omega > 0$ .

La corrección del autovector propio por izquierda  $\langle \overset{0}{\Psi}_m | = \langle m |$  y  $\overset{0}{\lambda} = m$  puede obtenerse de modo similar. A segundo orden se tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \langle \overset{0}{\Psi}_m | &= \langle m | + \langle m | \overset{1}{H}_\Gamma P_\Gamma (m - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} + \\ &+ \langle m | \left( \overset{1}{H}_\Gamma P_\Gamma (m - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} \right)^2, \end{aligned} \quad (16)$$

con el mismo autovalor  $\overset{0}{\lambda}_m$  obtenido en (15).

La condición de normalización elegida resulta en autovectores  $| \overset{0}{\Phi}_m \rangle$  y  $\langle \overset{0}{\Psi}_m |$  que no están normalizados, luego definimos los siguientes autovectores normalizados  $| \overset{0}{f}_m \rangle$  y  $\langle \overset{0}{\tilde{f}}_m |$ , respectivamente, de modo de obtener un sistema biortonormal.

$$\begin{aligned} | \overset{0}{f}_m \rangle &\equiv | \overset{0}{\Phi}_m \rangle / \sqrt{\langle \overset{0}{\Psi}_m | \overset{0}{\Phi}_m \rangle}, \\ \langle \overset{0}{\tilde{f}}_m | &\equiv \langle \overset{0}{\Psi}_m | / \sqrt{\langle \overset{0}{\Psi}_m | \overset{0}{\Phi}_m \rangle}, \quad \langle \overset{0}{f}_m | \overset{0}{\tilde{f}}_m \rangle = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

### Perturbación del espectro continuo.

Para determinar los autovectores y autovalores de  $H_\Gamma$  que corresponden al espectro continuo, consideremos las ecuaciones (7)-(10) con  $| \overset{0}{\Phi} \rangle = |u\rangle$  y  $\overset{0}{\lambda} = u$  ( $u \in \Gamma$ ). La ecuación (7) es verificada, mientras que operando con la ecuación (8) como para el caso discreto, se tienen las siguientes ecuaciones

$$(u - z) \langle z | \overset{1}{\Phi} \rangle = \langle z | \overset{1}{H}_\Gamma |u\rangle - \lambda \delta_\Gamma(z - u), \quad (18)$$

$$(u - m) \langle m | \overset{1}{\Phi} \rangle = \langle m | \overset{1}{H}_\Gamma |u\rangle$$

Si pedimos que  $V_{zu}$  sea una función regular en ambas variables  $z$  y  $u$ , entonces el término  $\langle z | \overset{1}{H}_\Gamma |u\rangle = V_{zu}$  no incluye ningún término proporcional a  $\delta_\Gamma(z - u)$ , por lo que  $\overset{1}{\lambda} = 0$ . La ecuación (18) define las proyecciones de  $| \overset{1}{\Phi} \rangle$  sobre los subespacios generados por los proyectores  $P_\Gamma$  y  $P_d$ , de modo que  $| \overset{1}{\Phi} \rangle = P_\Gamma | \overset{1}{\Phi} \rangle + P_d | \overset{1}{\Phi} \rangle$

$$\begin{aligned} \lambda^1 = 0, \quad P_\Gamma | \Phi \rangle &= (u + i0 - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_\Gamma \overset{1}{H}_\Gamma | u \rangle, \\ P_d | \Phi \rangle &= (u - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_d \overset{1}{H}_\Gamma | u \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Operando en forma similar con la ecuación (9) obtenemos las siguientes expresiones que deben verificar las componentes  $\langle z | \Phi \rangle$ ,  $\langle m | \Phi \rangle$  y  $\lambda^2$ ,

$$\begin{aligned} (u - z) \langle z | \Phi \rangle &= \langle z | \overset{1}{H}_\Gamma | \Phi \rangle - \lambda^2 \delta_\Gamma(z - u), \\ (u - m) \langle m | \Phi \rangle &= \langle m | \overset{1}{H}_\Gamma | \Phi \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

Utilizando las expresiones (6) y (19) podemos calcular el término  $\langle z | \overset{1}{H}_\Gamma | \Phi \rangle$  el cual no incluye ningún factor proporcional a  $\delta_\Gamma(z - u)$  por lo que debe ser  $\lambda^2 = 0$ . Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \lambda^2 = 0, \quad P_\Gamma | \Phi \rangle &= (u + i0 - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_\Gamma \overset{1}{H}_\Gamma | \Phi \rangle, \\ P_d | \Phi \rangle &= (u - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1} P_d \overset{1}{H}_\Gamma | \Phi \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos el autovector  $| f_u \rangle = | u \rangle + | \Phi \rangle + | \Phi \rangle$  con autovalor  $\lambda_u = u$ .

En la determinación de la proyección sobre  $P_\Gamma$  de  $| \Phi \rangle$  y  $| \Phi \rangle$ , debemos evitar la singularidad del operador  $(u - \overset{0}{H}_\Gamma)^{-1}$ . Para esto hemos incluido el factor  $-i0$ , lo cual se corresponde con la solución outgoing en teoría de scattering.

En forma análoga es posible determinar los autovectores por izquierda  $\langle \tilde{f}_u |$  con autovalor  $\lambda_u = u$ .

Puede demostrarse que los vectores calculados de esta forma satisfacen, a segundo orden, las siguientes relaciones de ortogonalidad y completitud

$$\langle \tilde{f}_m | f_m \rangle = 1, \quad \langle \tilde{f}_u | f_u \rangle = \delta_\Gamma(u - u'), \quad (21)$$

$$\langle \tilde{f}_m | f_u \rangle = \langle \tilde{f}_u | f_m \rangle = 0,$$

$$I_\Gamma \equiv | f_m \rangle \langle \tilde{f}_m | + \int_\Gamma du | f_u \rangle \langle \tilde{f}_u |, \quad (22)$$

de modo que tenemos las siguientes realizaciones para la identidad

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Psi | I_\Gamma | \Phi \rangle,$$

$$I_\Gamma \equiv | m \rangle \langle m | + \int_\Gamma du | u \rangle \langle u | = | f_m \rangle \langle \tilde{f}_m | + \int_\Gamma du | f_u \rangle \langle \tilde{f}_u |, \quad (23)$$

y la siguiente descomposición espectral para  $H_\Gamma$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H | \Phi \rangle &= \langle \Psi | H_\Gamma | \Phi \rangle, \\ H_\Gamma &= \lambda_m | f_m \rangle \langle \tilde{f}_m | + \int_\Gamma du \lambda_u | f_u \rangle \langle \tilde{f}_u |. \end{aligned} \quad (24)$$

Notemos que las realizaciones de  $I_\Gamma$  y  $H_\Gamma$  dadas en las ecuaciones (23) y (24) tienen significado sólo cuando son usados para evaluar  $\langle \Psi | I_\Gamma | \Phi \rangle$  o  $\langle \Psi | H_\Gamma | \Phi \rangle$  para

vectores  $\Psi$  ( $\Phi$ ) para los cuales  $\psi(\omega) = \langle \omega | \Psi \rangle$  ( $\varphi(\omega) = \langle \omega | \Phi \rangle$ ) tienen bien definida su extensión analítica al semiplano superior (inferior).

### Evolución temporal.

La probabilidad  $P_t$  de que el vector estado  $\Phi_t = e^{-iHt} \Phi_0$  al tiempo  $t$  sea medido en el estado  $\Psi$  es

$$P_t = \langle \Psi | \exp(-iHt) | \Phi_0 \rangle^2 = \langle \Psi | \exp(-iH_\Gamma t) | \Phi_0 \rangle^2 \quad (25)$$

Utilizando la descomposición espectral (24) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \Psi | e^{-iH_\Gamma t} | \Phi_0 \rangle &= \exp(-i\lambda_m t) \langle \Psi | f_m \rangle \langle \tilde{f}_m | \Phi_0 \rangle + \\ &+ \int_\Gamma du \exp(-iut) \langle \Psi | f_u \rangle \langle \tilde{f}_u | \Phi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Consideremos la amplitud de supervivencia del estado inestable  $| m \rangle$

$$\begin{aligned} \langle m | e^{-iH_\Gamma t} | m \rangle &= \exp(-i\lambda_m t) \langle m | f_m \rangle \langle \tilde{f}_m | m \rangle + \\ &+ \int_\Gamma du \exp(-iut) \langle m | f_u \rangle \langle \tilde{f}_u | m \rangle. \end{aligned}$$

Supongamos que en la expresión de  $H$  existe un parámetro  $\varepsilon$  pequeño incluido en  $V_\omega$ , que determina la intensidad de la interacción entre el estado discreto ligado y los estados libres del continuo. Utilizando las expresiones explícitas para los autovectores dados en la sección III, obtenemos

$$\langle m | f_m \rangle \langle \tilde{f}_m | m \rangle = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \langle m | f_u \rangle \langle \tilde{f}_u | m \rangle = O(\varepsilon^2)$$

Utilizando la expresión dada en (15) para  $\lambda_m$ , obtenemos

$$\langle m | \exp(-iHt) | m \rangle^2 \cong \exp(-2\pi V_m^2 t) \quad (27)$$

Esta expresión resulta válida si  $\varepsilon^2 \ll 1$  y  $\varepsilon^2 t \leq 1$ , esto es, para interacciones pequeñas y para tiempos no muy largos.

### IV. MODELO DE FRIEDRICHS

El modelo de Friedrichs puede obtenerse como un caso especial a partir de la ecuación (1), si  $V_{\omega\omega} = 0$ .

Así resulta  $H = \overset{0}{H} + \overset{1}{H}$ , donde

$$\overset{0}{H} = m | m \rangle \langle m | + \int_0^\infty d\omega \omega | \omega \rangle \langle \omega |, \quad m \in \mathbb{R}^+, \quad (28)$$

$$\overset{1}{H} = \int_0^\infty d\omega (V_\omega | \omega \rangle \langle m | + \bar{V}_\omega | m \rangle \langle \omega |), \quad V_\omega = \bar{V}_\omega$$

La variable  $\omega \in \mathbb{R}^+$  puede convertirse en la variable  $z \in \Gamma$ , donde  $\Gamma$  es una curva en el semiplano complejo inferior. Resulta entonces  $H_\Gamma = \overset{0}{H}_\Gamma + \overset{1}{H}_\Gamma$ , donde

$$\overset{0}{H}_\Gamma = m | m \rangle \langle m | + \int_\Gamma dz z | z \rangle \langle z |, \quad (29)$$

$$\overset{1}{H}_\Gamma = \int_\Gamma dz V_z | z \rangle \langle m | + \int_\Gamma dz \bar{V}_z | m \rangle \langle z |.$$

En la expresión anterior  $V_z$  y  $\overline{V_z}$  son extensiones analíticas de  $V_m$  y  $\overline{V_m}$ . Usando las ecuaciones (13)-(17) obtenemos los siguientes autovectores normalizados a segundo orden de aproximación en el parámetro de interacción

$$\begin{aligned} |f_m\rangle &\equiv |m\rangle + \int_{\Gamma} dz \frac{V_z}{m-z} |z\rangle - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} dz \frac{V_z \overline{V_z}}{(m-z)^2} |m\rangle \\ \langle \tilde{f}_m| &\equiv \langle m| + \int_{\Gamma} dz \frac{\overline{V_z}}{m-z} \langle z| - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} dz \frac{V_z \overline{V_z}}{(m-z)^2} \langle m| \end{aligned} \quad (30)$$

con autovalor

$$\begin{aligned} \lambda_m &\equiv m + \int_{\Gamma} dz \frac{V_z \overline{V_z}}{m-z} = \\ & m - \int_0^{\infty} d\omega P \left( \frac{1}{\omega-m} \right) |V_{\omega}|^2 - i\pi |V_m|^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Del mismo modo, podemos obtener los autovectores para el espectro continuo a segundo orden:

$$\begin{aligned} |f_u\rangle &\equiv |u\rangle + \frac{\overline{V_u}}{u-m} |m\rangle + \frac{\overline{V_u}}{u-m} \int_{\Gamma} dz \frac{V_z}{(u-z+i0)} |z\rangle \\ \langle \tilde{f}_u| &\equiv \langle u| + \frac{V_u}{u-m} \langle m| + \frac{V_u}{u-m} \int_{\Gamma} dz \frac{\overline{V_z}}{(u-z-i0)} \langle z| \end{aligned} \quad (32)$$

con autovalor  $\lambda_u = u$  ( $u \in \Gamma$ ).

Es posible obtener soluciones analíticas para el problema de autovectores por derecha  $H_{\Gamma} |\Phi\rangle = \lambda |\Phi\rangle$  e izquierda

$$\langle \Psi | H_{\Gamma} = \lambda \langle \Psi |, \text{ donde } |\Phi\rangle = |m\rangle \langle m | \Phi \rangle + \int_{\Gamma} dz |z\rangle \langle z | \Phi \rangle$$

$$\text{y } \langle \Psi | = \langle \Psi | m \rangle \langle m | + \int_{\Gamma} dz \langle \Psi | z \rangle \langle z |. \text{ Si}$$

$$\eta(\lambda) \equiv \lambda - m - \int_{\Gamma} dz \frac{V_z \overline{V_z}}{\lambda - z} \quad (33)$$

satisface  $\eta(\lambda) = 0$  para un solo número complejo  $\lambda_m$  localizado en el plano complejo, entre  $R^+$  y la curva  $\Gamma$ , se obtiene <sup>(3)</sup>

$$H_{\Gamma} = \lambda_m |f_m\rangle \langle \tilde{f}_m| + \int du u |f_u\rangle \langle \tilde{f}_u|,$$

donde

$$\begin{aligned} |f_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\eta'(\lambda_m)}} \left( |m\rangle + \int_{\Gamma} dz \frac{V_z}{\lambda_m - z} |z\rangle \right) \\ \langle \tilde{f}_m| &= \frac{1}{\sqrt{\eta'(\lambda_m)}} \left( \langle m| + \int_{\Gamma} dz \frac{\overline{V_z}}{\lambda_m - z} \langle z| \right) \\ |f_u\rangle &= |u\rangle + \frac{\overline{V_u}}{\eta(u+i0)} \left[ |m\rangle + \int_{\Gamma} dz \frac{V_z}{(u+i0)-z} |z\rangle \right] \\ \langle \tilde{f}_u| &= \langle u| + \frac{V_u}{\eta(u-i0)} \left[ \langle m| + \int_{\Gamma} dz \frac{\overline{V_z}}{(u-i0)-z} \langle z| \right], \quad u \in \Gamma \end{aligned} \quad (34)$$

Estos autovectores generalizados forman un sistema biortonormal completo <sup>(3)</sup>, en el sentido dado en las ecuaciones (21) y (23). Con el objetivo de comparar los autovectores y autovalores aproximados por las expresiones (30)-(32), realizaremos una expansión en

potencias del parámetro de interacción de las expresiones exactas (34). Utilizando la ecuación (33), con la condición  $\eta(\lambda_m) = 0$ , podemos determinar iterativamente el autovalor  $\lambda_m$

$$\lambda_m^{n+1} = m + \int_{\Gamma} dz \frac{V_z \overline{V_z}}{\lambda_m^n - z}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \lambda_m^0 = m.$$

A segundo orden tenemos para  $\lambda_m$

$$\lambda_m \equiv m + \int_{\Gamma} dz \frac{V_z \overline{V_z}}{m-z} \quad (35)$$

Las siguientes expresiones, determinadas a segundo orden en el parámetro de interacción, permiten obtener expresiones de (34) comparables a (30)-(32)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\eta'(\lambda_m)}} &\equiv 1 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} dz \frac{V_z \overline{V_z}}{m-z}, \\ \frac{1}{\lambda_m - z} &= \frac{1}{m-z} + O(V^2), \\ \frac{1}{\eta(u \pm i0)} &= \frac{1}{u-m} + O(V^2) \end{aligned} \quad (36)$$

así, sustituyendo (35) y (36) en (34) obtenemos las expresiones aproximadas (30)-(32).

## V. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Cuando nos encontramos con el problema de obtener la descomposición espectral de un Hamiltoniano

$H = H^0 + H^1$ , donde  $H^0$  tiene espectro discreto y continuo superpuestos, no es posible aplicar los métodos usuales de perturbación. Restringiéndonos a vectores  $\Phi$  ( $\Psi$ ) para los cuales  $\langle \omega | \Phi \rangle$  ( $\langle \omega | \Psi \rangle$ ) tienen extensiones analíticas bien definidas al semiplano complejo inferior (superior), es posible escribir la amplitud de la transición de  $\Phi$  en  $\Psi$  en un tiempo  $t$  en la forma  $\langle \Psi | \Phi_t \rangle$

$= \langle \Psi | \exp(-iH_{\Gamma} t) | \Phi \rangle$  donde  $H_{\Gamma}$  es la extensión analítica al semiplano complejo inferior del Hamiltoniano  $H$ . Mientras que en  $H$  aparecen los funcionales  $|\omega\rangle$  y  $\langle \omega|$  ( $\omega \in R^+$ ), en  $H_{\Gamma}$  estos son reemplazados por los

funcionales  $|z\rangle$  y  $\langle z|$  ( $z \in \Gamma$ ). Como en  $H_{\Gamma}$  desaparece la superposición entre los espectros continuos y discreto, es posible implementar un algoritmo perturbativo bien definido para obtener la descomposición espectral generalizada de  $H_{\Gamma}$ , con autovalores complejos.

Para el modelo de Friedrichs (un caso especial del Hamiltoniano dado en la ecuación (1)), la solución al problema de autovalores, obtenida por el algoritmo perturbativo, coincide con la solución exacta obtenida por Sudarshan, Chiu y Gorini <sup>(3)</sup>. La misma descomposición espectral, para el modelo de Friedrichs fue obtenida por T. Petrosky, I. Prigogine y S. Tasaki <sup>(4)</sup>, con un método perturbativo usando una "regla de ordenamiento temporal", que consiste en incluir una parte imaginaria pequeña para evitar los denominadores pequeños, con signo diferente de acuerdo al tipo de transición involucrada.

En el algoritmo perturbativo presentado en este trabajo, no es necesario recurrir a reglas adicionales para evitar las singularidades debidas a las resonancias entre parte discreta y continua del espectro no perturbado. Cuando los estados son restringidos a aquellos con convenientes propiedades de analiticidad, la deformación de las integrales del semieje real positivo a la curva sobre el semiplano inferior del plano complejo elimina las resonancias continuo-discreto. Una vez obtenidas las expresiones para los autovalores y autovectores al orden deseado, la curva de integración puede ser vuelta al semieje real positivo. Así, la "regla de ordenamiento temporal" de la referencia <sup>(4)</sup> puede ser deducida de las propiedades de la extensión analítica de los vectores.

Si la probabilidad

$$P_t = \left| \langle \Psi | \exp(-iHt) | \Phi \rangle \right|^2 = \left| e^{-i\tilde{\lambda}_m t} \langle \Psi | f_m \rangle \langle \tilde{f}_m | \Phi \rangle + \int_{\Gamma} dz e^{-izt} \langle \Psi | f_z \rangle \langle \tilde{f}_z | \Phi \rangle \right|^2 \quad (37)$$

es obtenida a través de los autovalores y autovectores calculados al n-ésimo orden, las condiciones necesarias para una buena aproximación de  $P_t$  son  $\varepsilon^{n-1} \ll 1$  y  $\varepsilon^{n-1} t \ll 1$  donde  $\varepsilon$  es un parámetro de interacción pequeño. Aún para interacciones pequeñas, la aproximación de  $P_t$  no resulta válida para tiempos muy largos. Una ventaja importante de la descomposición espectral en términos de autovectores generalizados con autovalores complejos es que ésta puede ser obtenido con un algoritmo perturbativo bien definido. El hecho que esta descomposición espectral es sólo posible para vectores  $|\Phi\rangle$  y  $|\Psi\rangle$ , con las propiedades de analiticidad mencionadas no es una limitación. Cuando modelamos un estado o un observable a partir de una cantidad finita de información, procedente de datos experimentales, siempre es posible elegir  $\langle \omega | \Phi \rangle$  ( $\langle \omega | \Psi \rangle$ ) con extensión analítica al semiplano inferior (superior) del plano complejo. Más aún, podríamos seleccionar  $\langle \omega | \Phi \rangle$  ( $\langle \omega | \Psi \rangle$ ) de modo que sea extensible analíticamente al semiplano superior (inferior). Haciendo esta elección la probabilidad  $P_t$  tendría la siguiente expresión

$$P_t = \left| \langle \Psi | \exp(-iHt) | \Phi \rangle \right|^2 = \left| e^{-i\tilde{\lambda}_m t} \langle \Phi | \tilde{f}_m \rangle \langle f_m | \Psi \rangle + \int_{\Gamma} dz e^{-izt} \langle \Phi | \tilde{f}_z \rangle \langle f_z | \Psi \rangle \right|^2 \quad (38)$$

donde  $|\tilde{f}_m\rangle$  y  $|\tilde{f}_z\rangle$  ( $\langle f_m|$  y  $\langle f_z|$ ) son autovectores generalizados por derecha (izquierda) de  $H_{\bar{\Gamma}}$ , siendo  $\bar{\Gamma}$  una curva en el semiplano complejo superior. Para vectores que pueden ser extendidos analíticamente tanto al semiplano inferior como al semiplano superior, ambas expresiones (37) y (38) pueden ser utilizadas para calcular  $P_t$ . Sin embargo, la ecuación (38) es una mala elección para  $t > 0$ , pues la parte imaginaria positiva del autovalor dará un valor de  $P_t$  bien definido en términos

de factores no acotados (la evolución temporal incluye términos exponenciales crecientes).

Otro comentario importante es que, aunque cualquier estado físico  $\Phi$  puede ser escrito en términos de autovectores generalizados como  $|\Phi\rangle = |f_m\rangle \langle \tilde{f}_m | \Phi \rangle + \int_{\Gamma} dz |f_z\rangle \langle \tilde{f}_z | \Phi \rangle$ , no podemos dar a  $|f_m\rangle$  y a  $|f_z\rangle$  un significado físico independiente, debido a que si hacemos la evolución temporal de estos "estados" obtendríamos alguna de las siguientes expresiones

$$P_t = \left| \langle \Psi | \exp(-iHt) | f_m \rangle \right|^2 = \exp\left[-i(\lambda_m - \bar{\lambda}_m)t\right] \left| \langle \Psi | f_m \rangle \right|^2 \quad \text{Im}(\lambda_m - \bar{\lambda}_m) < 0,$$

$$P_t = \left| \langle \Psi | \exp(-iHt) | f_z \rangle \right|^2 = \exp\left[-i(z - \bar{z})t\right] \left| \langle \Psi | f_z \rangle \right|^2 \quad \text{Im}(z - \bar{z}) < 0,$$

lo que indica que  $P_t$  se anula para  $t \rightarrow \infty$  para todos los vectores  $\Psi$ , un indicio de que estos autovectores generalizados no tienen un significado físico independiente. Sin embargo ellos pueden ser usados exitosamente para descomponer cualquier estado físico  $\Phi$  y para calcular probabilidades de transición, como en las ecuaciones (25)-(27). En este trabajo hemos tratado con estados y observables que pueden ser representados por vectores normalizados. La extensión del formalismo para estados mezcla, representados por operadores densidad de la forma  $\hat{\rho} = \sum_j p_j |\Phi_j\rangle \langle \Phi_j|$  ( $\langle \Phi_j | \Phi_j \rangle = 1$ ,  $p_j \geq 0$ ,  $\sum_j p_j = 1$ ) es directa. Sin embargo, observables

singulares como  $\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega |\omega\rangle \langle \omega|$ , no pueden ser considerados con el método perturbativo presentado en este trabajo. En este caso es posible considerar los estados como funcionales actuando sobre el conjunto de observables representados por operadores que contienen término singulares <sup>(5)(6)(7)</sup>. El correspondiente método perturbativo será tema para un próximo trabajo.

## Referencias

- 1 - E.C.G.Sudarshan, Phys.Rev.A, **50**, 2006-2026, (1994).
- 2 - M.Castagnino, R.Laura, Phys.Rev.A, **56**, 108-119, (1997).
- 3 - E.C.G.Sudarshan, C.B.Chiu, V.Gorini, Phys.Rev.D, **18**, 2914-2929, (1978).
- 4 - T.Petrosky, I.Prigogine, S.Tasaki, Physica A, **173**, 175-242, (1991).
- 5 - I.Antoniou, Z.Suchanecski, R.Laura, S.Tasaki, Physica A, **24**, 737-772, (1997).
- 6 - R.Laura, M.Castagnino, Phys.Rev.A, **57**, 4140-4152, (1997).
- 7 - R.Laura, M.Castagnino, Phys.Rev.E, **57**, 3948-3961, (1998).