

DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER PARA UN FRACTAL UNIDIMENSIONAL

S. Albertali ⁽¹⁾, M. Delannoy ⁽¹⁾, M.C. Aguirre ⁽²⁾, M. Armendariz ⁽²⁾, A. Korol ⁽²⁾ y G.H. Kaufmann ⁽³⁾

⁽¹⁾ Departamento de Física y Química, Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas, Universidad Nacional de Rosario.

⁽²⁾ Departamento de Matemática y Estadística, Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas, Universidad Nacional de Rosario.

⁽³⁾ Instituto de Física Rosario (CONICET- UNR) y Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario.

e-mail: guille@ifir.ifir.edu.ar

En este trabajo se aplica una técnica difractométrica para determinar la dimensión de objetos fractales unidimensionales. En particular, se analiza la figura de difracción de Fraunhofer producida por un conjunto de Cantor aproximado por un número finito de iteraciones. La dimensión fractal se evalúa a través del análisis espacial de la distribución de intensidad generada por la figura de difracción. El valor obtenido experimentalmente se compara con el determinado a través de una simulación por computadora usando el operador de Hutchinson y con la dimensión de autosemejanza y de Hausdorff-Besicovich calculadas analíticamente.

In this work a diffractometric technique is applied in order to determine the dimension of one-dimensional fractal objects. In particular, the Fraunhofer diffraction pattern produced by a Cantor set approximated by a finite number of iterations is analyzed. The fractal dimension is evaluated from the spatial analysis of the intensity distribution produced by the diffraction pattern. The value obtained experimentally is compared with that determined by computer simulation using the Hutchinson operator and with the self-similar and the Hausdorff-Besicovich dimensions calculated analytically.

I. INTRODUCCION

La geometría fractal propone una nueva manera de encarar el análisis de estructuras naturales donde, aunque aparentemente solo hay caos y confusión, se puede descubrir cierta regularidad que se repite sin importar la escala en que se observa la estructura ⁽¹⁾. La relación entre el factor de reducción de escala s y el número de elementos N en que la estructura se puede dividir es

$$N = 1/s^D \quad (1)$$

donde D es la dimensión fractal de autosemejanza.

En la última década se comenzó a analizar la difracción óptica de objetos fractales con el propósito de estudiar sus características y determinar su dimensión fractal ⁽²⁾. Estos estudios se basan en la estructura determinística que presenta la figura de difracción de Fraunhofer producida por fractales estrictamente autosemejantes. La dimensión fractal D se puede determinar estudiando la variación de la intensidad $I(q)$ difractada por el fractal en la posición q dado que ⁽³⁾

$$I(q) \sim q^{-D} \quad (2)$$

En este trabajo se estudia la figura de difracción producida por un fractal simple en su generación: las barras de Cantor. Se determina su dimensión a través de dos métodos: difracción y simulación por computadora. Finalmente se comparan los valores obtenidos con la dimensión de autosemejanza conocida.

II. FRACTAL DE CANTOR

El conjunto de Cantor fue presentado por primera vez en 1883 y es el más antiguo de los fractales clásicos. El conjunto básico de Cantor es un conjunto infinito de

puntos en el intervalo $[0,1]$. Mediante un proceso de realimentación se genera una sucesión de intervalos cerrados partiendo del segmento unitario base. En el mismo se elimina el intervalo $(1/3, 2/3)$, es decir el tercio central del $[0,1]$. Este proceso genera dos intervalos, el $[0, 1/3]$ y el $[2/3, 1]$ de longitud $1/3$ cada uno. Así se completa un paso básico de la construcción.



Figura 1. Conjunto de Cantor

En el segundo paso se eliminan los tercios centrales de los intervalos determinados en el paso anterior, para obtener 4 intervalos de longitud $1/9$. Este procedimiento se repite generando una sucesión de intervalos cerrados. Así, luego del n -ésimo paso se obtienen 2^n intervalos, cada uno de ellos de longitud $(1/3)^n$.

El conjunto de puntos resultantes cuando se realiza este proceso indefinidamente es el conjunto de Cantor. Si en el n -ésimo paso se levanta una barra vertical en cada intervalo, todas de la misma altura se obtiene el conjunto de barras de Cantor.

Para calcular su dimensión de autosemejanza se utiliza la ec. (1), con $N=2^n$ y $s=(1/3)^n$ para $n \rightarrow \infty$ y se obtiene $D = \ln 2 / \ln 3$ ⁽⁴⁾.



Figura 2. Barras de Cantor.

Como objeto difractante se utiliza el negativo de una fotografía con una película de alta resolución (500 líneas/mm) de las barras de Cantor.

III. METODO EXPERIMENTAL

El montaje óptico para generar la figura de difracción de Fraunhofer se muestra en la Fig. 3. El sistema consta de un laser de He-Ne, una lente de expansión con filtro espacial y una lente transformadora. La fotografía de las barras de Cantor se coloca a continuación de la lente y la figura de difracción se observa en una pantalla situada en el plano de Fourier. La luz difractada se adquiere con una cámara CCD cuya salida se envía a una computadora.

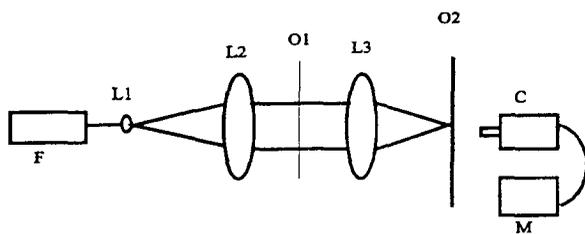


Fig. 3 Sistema óptico: F, laser He-Ne; L1, filtro espacial; L2 y L3, lentes convergentes; O1, plano objeto; O2, plano de Fourier; C, cámara CCD; M, computadora.

La intensidad luminosa difractada por las barras de Cantor se puede calcular usando la óptica de Fourier⁽⁵⁾. Si $a(x)$ es la amplitud luminosa previa al objeto difractante, la amplitud sobre el plano de este último será igual a

$$a'(x) = a(x)T(x) \quad (3)$$

donde $T(x)$ es la función de transmitancia del objeto. Usando la fórmula de difracción de Fresnel, se puede obtener la amplitud luminosa difractada por el objeto

$$A(p) = \frac{A_0}{j\lambda d} \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda d}(p^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \exp(-2j\pi px) dx \quad (4)$$

donde p es la frecuencia espacial, λ es la longitud de onda, x es la coordenada sobre el plano del objeto y d la distancia al plano de difracción. Como se conoce, la ec. (4) es la transformada de Fourier de la transmitancia $T(x)$ del objeto.

En el caso de las barras de Cantor, la transmitancia de la red de n pasos se puede determinar recursivamente a partir de la transmitancia de una única barra de ancho unitario, o sea la función rectángulo. Luego, se aplica la transformada de Fourier para obtener

$$A_n(q) = 2^{2n} \left[\prod_{i=0}^{n-1} \cos(2\pi 3^i q) \right] A_0(q) \quad (5)$$

$$A_0(q) = \frac{\text{sen } \pi q}{\pi q} \quad (6)$$

donde $A_0(q)$ es la amplitud difractada por una única barra.

La intensidad se calcula como el cuadrado de la ecuación anterior, es decir

$$I_n(q) = 2^{2n} \left[\prod_{i=0}^{n-1} \cos(2\pi 3^i q) \right]^2 \left[\frac{\text{sen } \pi q}{\pi q} \right]^2 \quad (7)$$

Esta ecuación presenta un factor de forma $F_n(q)$ y un factor de estructura $S_n(q)$. El factor de forma, que es el segundo corchete, corresponde a la intensidad difractada por un elemento unitario, es decir por una barra. El factor de estructura es el primer corchete y muestra el modo en que el elemento unitario se distribuye para formar el fractal.

La Fig. 4 muestra una fotografía de la figura de difracción obtenida experimentalmente para barras de Cantor de 5 pasos. La Fig. 5 muestra la distribución de intensidad generada por dicha figura de difracción.

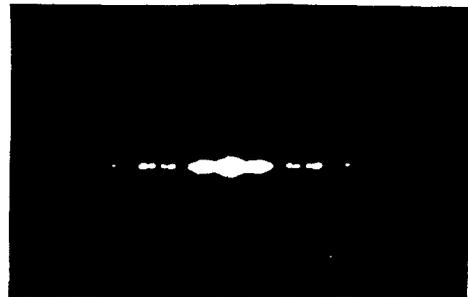


Figura 4. Fotografía de la figura de difracción experimental para las barras de Cantor de 5 pasos.

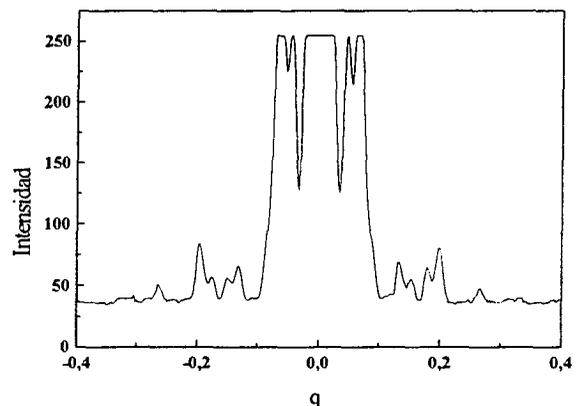


Figura 5. Distribución de intensidad medida experimentalmente para las barras de Cantor de 5 pasos.

Para de terminar el valor de D , se calcula la intensidad promedio I en bandas elegidas en la figura de difracción dentro de la denominada zona fractal. Esta es la zona correspondiente a las bajas frecuencias y está limitada por el primer cero de la envolvente de difracción producida por el elemento mínimo de la red, o sea el primer cero del factor de forma. Esta es la zona en la que se estudian las características fractales.

En la Fig. 6 se muestran los valores obtenidos experimentalmente.

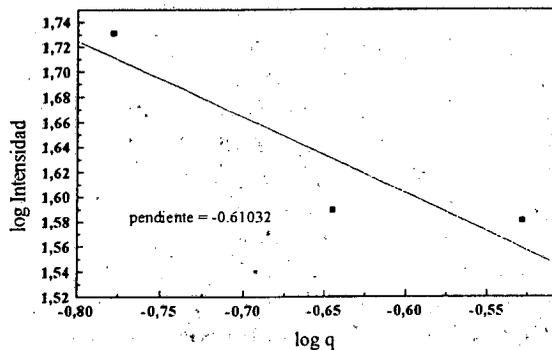


Figura 6. Gráfico log-log mostrando la relación entre la intensidad I y la posición espacial q .

IV. METODO DE SIMULACION

En el proceso de simulación, el fractal de Cantor se genera por un algoritmo recursivo que utiliza el operador de Hutchinson. Si $W(x) = w_1(x) \cup w_2(x)$ es el operador de Hutchinson asociado al conjunto de Cantor, entonces $w_1(x) = (1/3)x$ y $w_2(x) = (1/3)x + (2/3)$ con $x \in A_0$ donde A_0 es el segmento unitario base. Por lo tanto, $A_n = W(A_{n-1})$ es una aproximación del fractal de Cantor para n pasos.

Usando un algoritmo rápido se calcula la transformada de Fourier de A_n . La distribución de intensidad se obtiene graficando el cuadrado de la amplitud en función de la posición como se indica en la Fig. 7.

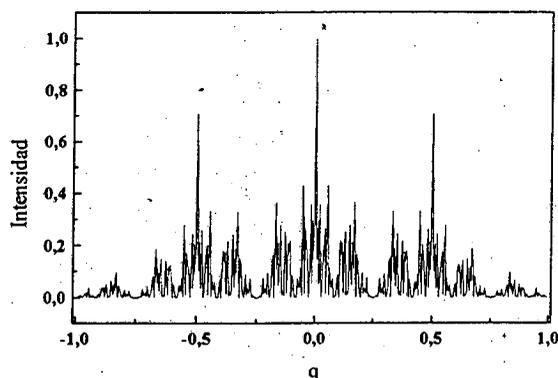


Figura 7. Intensidad de la figura de difracción producida por las barras de Cantor de 5 pasos.

La intensidad medida en la posición q sobre la figura de difracción resulta proporcional a una potencia de q ,

es decir $I \approx q^D$. Si D no es entero, se concluye que el objeto difractante es un fractal y que su dimensión fractal es D .

En la Fig. 8 se muestran los valores y la recta de ajuste obtenidos. La pendiente de esta recta es $-0,62972$ y corresponde al valor de la dimensión fractal D .

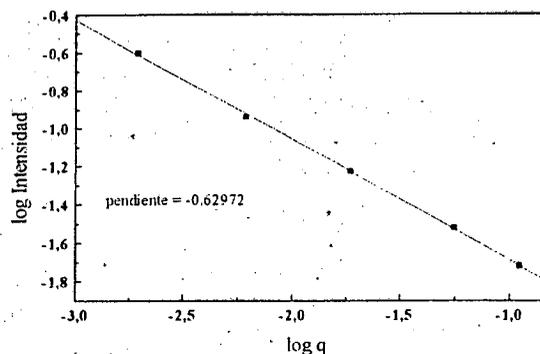


Figura 8. Gráfico log-log mostrando la relación entre la intensidad I y la posición espacial q para el método de simulación.

V. CONCLUSIONES

La figura de difracción posee las mismas propiedades de autosemejanza que el objeto en estudio. La intensidad difractada por el fractal de Cantor, promediada sobre bandas de frecuencia, varía de acuerdo a una ley potencial, y el exponente D de esta ley potencial resulta ser la dimensión fractal del objeto estudiado. Además, los valores de D obtenidos experimentalmente y en el proceso de simulación se ajustan al valor analítico con errores que disminuyen al aumentar el número de pasos en la generación de las barras de Cantor. Concluyendo la difracción de Fraunhofer constituye un método óptico que se puede utilizar exitosamente para determinar la dimensión fractal de objetos unidimensionales.

REFERENCIAS

- 1 - Mandelbrot, B. "The Fractal Geometry of Nature", Freeman, New York, (1983).
- 2 - Uozumi, J., Kimura, H., and Asakura, T., J. Mod. Opt. 37, 1011-1031 (1990).
- 3 - Uozumi, J., Kimura, H., and Asakura, T., J. Mod. Opt 38, 1335-1347 (1991).
- 4 - Falconer, K. "Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications", John Wiley, Chichester, (1990).
- 5 - Goodman, J. "Introduction a l'optique de Fourier", Masson, Paris, (1982).