

# Cálculo de la respuesta de una cavidad optoacústica semiesférica

Ladaga J.L., Mosquera C.F. y Sancho E.G.

Facultad de Ingeniería UBA – Laboratorio de láser – Paseo Colón 850 – (1063) Buenos Aires  
e-mail: *cmosque@fi.uba.ar*

El decaimiento de una muestra, a posteriori de la absorción de energía de un láser, excita diferentes modos de vibración de cavidades acústicas resonantes. Para dos cavidades, una esférica y otra semiesférica, ambas sin ventanas, se calcula la amplitud de la onda de presión, relativa a la potencia depositada en el medio, en el punto de la superficie lateral de la cavidad donde se ubica el micrófono, cuando la fuente luminosa es un led ubicado en el centro de la esfera o de la semiesfera. Se comparan estos resultados con los obtenidos para una cavidad cilíndrica de sección circular -resonando a igual frecuencia y con igual volumen excitado que las cavidades esféricas- con el haz del láser centrado en su eje, forma habitual en que se la utiliza. Se comparan también los factores de calidad de las cavidades.

Palabras clave: optoacústica, cavidades resonantes, factor de calidad.

The amplitudes of the pressure wave, relative to the delivered power to the medium, are calculated for two resonant cavities: one of them spherical and the other hemispherical. Both cavities have no windows; the power source is a led placed at the center of each cavity. These results are compared with the result obtained for a circular cross section resonant cylindrical cavity with the laser power beam at the cavity axis. This cavity has the same excited volume that the spherical and semispherical cavities. The quality figure of the cavities are calculated and compared.

Keywords: optoacoustic; resonant cavities; quality figure.

## Introducción

En la investigación de fenómenos optoacústicos se proponen dos cavidades: una semiesférica y otra esférica, ambas sin ventanas.

En la cavidad semiesférica la fuente luminosa es un diodo led ubicado en el centro del plano ecuatorial que cierra la cavidad. La utilización de un led tiene como ventaja que se lo puede modular electrónicamente a frecuencias (que pueden llegar a 10 KHz) que son difícilmente alcanzables cuando se opera con láseres de CO<sub>2</sub> u otros modulados mecánicamente. Este montaje, a la vez que permite reemplazar a la fuente láser, elimina la presencia de las ventanas (por las que normalmente se hace ingresar la radiación láser a la cavidad) como fuentes de ruido. El led emite en un cono cuyo máximo ángulo de apertura es de 30°; el micrófono se ubica en la posición donde la presión es máxima, es decir, en el vértice de la cavidad.

Para el cálculo de la respuesta de un resonador esférico sin ventanas, se lo supone alimentado por un led ubicado en el centro de la esfera y con el micrófono situado sobre la superficie esférica, en el punto en el que la corta el eje de simetría del cono de excitación. En ambas cavidades el micrófono está ubicado en el punto de máxima presión.

## Cavidad esférica

En general, en una cavidad resonante, la solución de la ecuación de onda inhomogénea para la presión está dada por<sup>(1)</sup>:

$$p(\vec{r}, t) = A_0(t) + \sum_n A_n(t) \cdot p_n(\vec{r}) \quad (1)$$

en la cual  $p_n(\vec{r})$  son las autofunciones que representan los modos resonantes de la presión en la cavidad, siendo  $n$  el conjunto de números que las identifica. Los coeficientes del desarrollo, a menos del factor temporal  $e^{i\omega t}$ , se expresan así:

$$A_0 = \frac{(\gamma - 1) \cdot \int H(\vec{r}) dV}{i \cdot \omega \cdot V_{res}}; \quad (2)$$

$$A_n = \frac{\int H(\vec{r}) \cdot p_n(\vec{r}) dV}{\left( \omega_n^2 - \omega^2 + \frac{i \cdot \omega \cdot \omega_n}{Q_n} \right) \cdot \int |p_n(\vec{r})|^2 dV}$$

donde  $\gamma$  es la constante adiabática del gas dentro de la cavidad;  $\omega_n$  es alguna de las frecuencias angulares de oscilación propia de la cavidad;  $\omega$  es la frecuencia angular de modulación de la fuente luminosa;  $i$  es la unidad imaginaria;  $H(\vec{r})$  es la potencia calorífica por unidad de volumen depositada en el medio gaseoso; y  $Q_n$  es el factor de calidad de la cavidad, cuya expresión es:

$$Q_n = \frac{\omega}{v} \cdot \frac{\int [p_n(\vec{r})]^2 dV}{\int [p_n(\vec{r})]^2 \cdot \zeta \cdot dS} \quad (3)$$

En esta definición,  $v$  es la velocidad del sonido en el medio gaseoso y  $\zeta$  es la conductividad acústica específica<sup>(2)</sup> máxima, que da cuenta de los fenómenos de pérdidas de energía en la interfase entre el gas (en nuestro caso N<sub>2</sub>) y la superficie interna de la cavidad. Estas pérdidas son debidas a la transferencia de calor del gas a la pared por la viscosidad del gas por un lado; y por otro, las debidas a la difusión del calor de la onda sonora a la pared, ambas en la muy delgada capa de fluido adyacente a ella. Para el nitrógeno, el valor máximo de  $\zeta$  es  $3.67 \times 10^{-3}$ .

En el caso de la cavidad esférica con simetría axial (independencia del azinut), las autofunciones de la presión se expresan como<sup>(3)</sup>:

$$p_l(r, \theta) = (k \cdot r)^{-\frac{1}{2}} \cdot J_{l+\frac{1}{2}}(k \cdot r) \cdot P_l(\cos \theta) \quad (4)$$

El anterior índice  $n$  resulta ser ahora el índice  $l$  ( $= 0, 1, 2, \dots$ ), ya que el índice  $m = 0$ .  $k$  es el número de onda,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la frecuencia resonante en el medio. La función  $J_{l+\frac{1}{2}}(k.r)$  es la función

de Bessel esférica<sup>(4)</sup> y  $P_l(\cos\theta)$  son los polinomios de Legendre de orden  $l$ .

La fuente luminosa, el led, emite la potencia dentro de un cono de abertura máxima igual a  $\pi/6$ . La semiabertura máxima es  $\theta_0$ , figura 1, y el radio de la superficie esférica es  $R$ . Por lo tanto, la densidad de potencia absorbida por el medio,  $H(r,\theta)$ , se expresará como  $H(r,\theta) = -\frac{dP}{dV}$ , donde  $P(r)$  es la potencia que se propaga en el medio y  $dP = \frac{\partial P}{\partial r}.dr = -\alpha.P.dr$  es la potencia depositada en el medio (perdida por el haz) en un intervalo radial  $dr$ . El coeficiente de absorción del medio es  $\alpha$ .

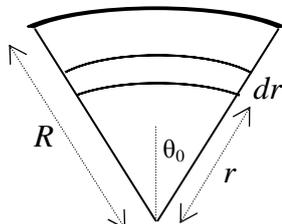


Figura 1: sección plana del volumen activo cónico (led en el vértice)

El diferencial de volumen está dado por  $dV = A.dr$  en la que  $A$  es el área del casquete esférico:  $A = \Omega.r^2$ , siendo  $\Omega$  el ángulo sólido dado por  $\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin\theta.d\phi.d\theta = 2.\pi.(1 - \cos\theta_0)$ . Por lo tanto  $dV = 2.\pi.(1 - \cos\theta_0).r^2.dr$  y, en consecuencia,

$$H(r,\theta) = \frac{\alpha.P}{2.\pi.(1 - \cos\theta_0)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot P$$

$P$  es una función de  $r$  pero,

dado que la absorción del medio es muy pequeña (pues  $\alpha.R \ll 1$ ), es posible en primera aproximación suponerla constante y extraerla fuera de la integral de los coeficientes  $A_n$ .

Dada la simetría de la fuente, lo más apropiado es excitar dentro de la cavidad esférica el modo con  $l=2$  y  $m=0$ . El radio de la superficie esférica será aquel que haga cero el valor de la función derivada de la presión respecto a la normal a la superficie y que asegure que la presión carezca de nodos, debidos a la función de Bessel, en todo el volumen.

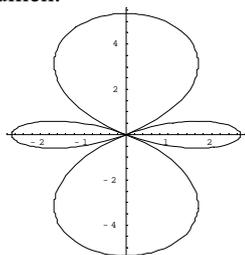


Figura 2: representación gráfica de la autofunción dentro de la cavidad esférica

La figura 2 representa el gráfico típico de la autofunción de la cavidad esférica, dada por la ecuación (4), para  $l = 2$  con el valor del radio de la esfera como parámetro y en función de  $\theta$ .

Los lóbulos principales de la autofunción están separados por una superficie cónica que representa la única superficie nodal de la presión dentro de la cavidad debida a un cero del polinomio de Legendre para  $l=2$ . Este modo de oscilación excitado por la fuente, no está degenerado.

### Cavidad semiesférica

La forma de los modos de excitación de la cavidad esférica es simétrica con respecto al plano ecuatorial. La derivada de la autofunción de la presión normal al plano, es decir, la derivada con respecto a  $\theta$  en  $\theta=\pi/2$ , es igual a cero. Esto implica que el plano ecuatorial de la esfera es una superficie con un máximo de presión: si se emplaza en su lugar una superficie física reflectante desde el punto de vista sonoro, a la cavidad semiesférica así formada le corresponderán las mismas autofunciones que a la cavidad esférica completa. La forma representativa de las autofunciones en la cavidad semiesférica estará dada gráficamente por los lóbulos de la figura 2 correspondientes a la parte positiva del eje vertical.

La cavidad semiesférica excitada mediante un led - ubicado en el centro de la superficie plana circular que cierra la cavidad ( $\theta=\pi/2$  en coordenadas esféricas)- que emite simétricamente en la dirección del eje  $z$  dentro del volumen cerrado por una superficie cónica de  $30^\circ$  de abertura máxima, oscilará en un único modo acorde con la forma de la excitación: el correspondiente a  $l=2$  y  $m=0$  de la autofunción dada por la ecuación (4), de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas. En particular, el radio de la cavidad se determina a partir de la primera raíz de la derivada de la función de Bessel. Por ejemplo, para una frecuencia de modulación del led de  $2663 \text{ Hz}$ , dicho radio es de  $7.02 \text{ cm}$ .

Con estas consideraciones, los únicos coeficientes que entran en el desarrollo de la presión, ecuación (1), son  $A_0$  y  $A_{l=2,m=0}$  (este último se indicará como  $A_2$ ). La ecuación (2), teniendo en cuenta las expresiones de la densidad de potencia calorífica depositada en el medio, del diferencial de volumen y del factor de calidad, quedará:

$$A_0 = \frac{3.(\gamma - 1)}{2.\pi.i.\omega.R^2} \cdot \alpha.P$$

$$A_2 = C.\alpha.P.f \cdot \frac{\int_0^{kR} x^{-\frac{1}{2}}.J_{2.5}(x).dx}{\frac{kR}{5} \cdot [J_{2.5}(kR)]^2 + \frac{1}{4} \int_0^{kR} [J_{2.5}(x)]^2 .dx} \quad (5)$$

$$C = \frac{(\gamma - 1)}{v^2.\xi} \cdot \frac{\cos\theta_a \cdot \text{sen}^2\theta_a}{2.(1 - \cos\theta_a)}$$

donde  $\theta_a$  es la semi-abertura del cono de emisión de la fuente e igual a  $\pi/12$ ,  $R$  es el radio de la semiesfera,  $f$  es la frecuencia de modulación del led y  $k.R = \frac{2.\pi.f}{v} .R = \pi.\alpha_{2,0,1} = 3.34$ , en la que  $\alpha_{2,0,1}$  es la primer raíz de la derivada de la función de Bessel esférica de orden 2.5.

Para una frecuencia de  $2663 \text{ Hz}$  y relativo al producto  $\alpha P$ ,  $A_0 \approx 2.3 \times 10^{-3}$ , mientras que  $A_2 = 4.98$ , lo cual indica que  $A_0 \ll A_2$ . En las expresiones de  $A_0$  y  $A_2$  se observa que, en la medida en que aumente la frecuencia, se acentúa lo poco significativo de  $A_0$  frente a  $A_2$ ; por lo tanto, a  $A_0$  no se lo tiene en cuenta para el cálculo de la presión total ni en módulo ni en fase.

### Cálculo de la presión en el micrófono

Para las cavidades esférica y semiesférica se calculó la presión en el micrófono mediante la ecuación (1). Esta presión es relativa al producto  $\alpha P$  ya que el coeficiente  $A_2$ , dado por la ecuación (5), fue calculado en forma relativa a dicho producto. Puesto que ambas cavidades tienen en su interior el mismo gas ( $\text{N}_2$ ) y la misma impureza y son alimentadas por un led, ambas recibirán la misma potencia de excitación. Al variar la frecuencia de modulación se debe variar consecuentemente el radio de ambas cavidades a fin de excitar en ellas el modo  $l=2$ ,  $m=0$ ; de esta forma el volumen de excitación variará por igual en ambas. La presión relativa calculada, en la posición del micrófono, está en función de la frecuencia de modulación del led.

Esta forma de cálculo permite la comparación entre las cavidades mencionadas y de éstas con una cavidad cilíndrica, de sección circular, resonante equivalente<sup>(5)</sup>. Se supone a esta cavidad cilíndrica, resonante en un modo transversal puro, de radio variable con la frecuencia de modulación de la fuente luminosa, y con un volumen de excitación igual al de las cavidades esférica y semiesférica. Esta cavidad cilíndrica se supone excitada por un haz láser dirigido a lo largo de su eje de simetría, de sección circular de  $1 \text{ cm}$  de diámetro y con una potencia igual a la entregada por el led con el objetivo de comparar los resultados.

En la figura 3 se muestran los resultados obtenidos con el cálculo:

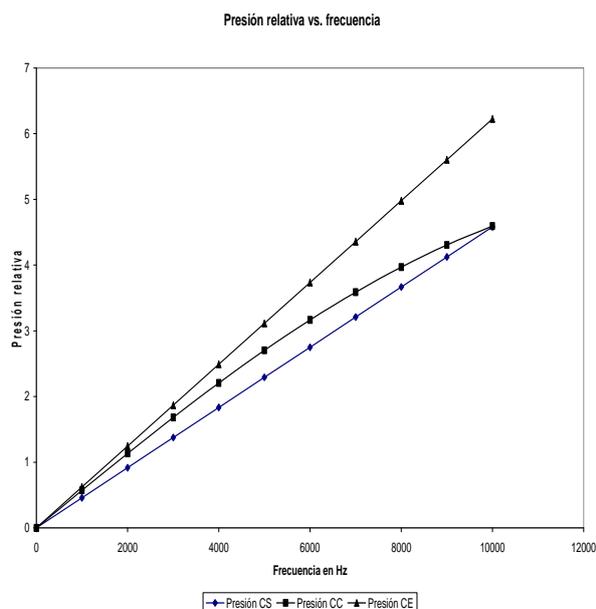


Figura 3: CS: cavidad semiesférica; CC: cavidad cilíndrica de sección circular; CE: cavidad esférica.

### Cálculo de los factores de calidad de las cavidades

Tal como se aprecia en la ecuación (3), el factor de calidad  $Q_n$  no depende del volumen de excitación, sino del volumen total y la superficie interna de la cavidad. Se lo calculó para las cavidades semiesférica, esférica y cilíndrica, considerando que todas son excitadas por fuentes luminosas de igual potencia. Los valores calculados para todas las cavidades son independientes de la frecuencia de modulación, ya que se las consideró resonantes para cada frecuencia del rango (entre  $0$  y  $10000 \text{ Hz}$ ). Esto significa que el radio de las cavidades esférica y semiesférica se modifica y con él, los volúmenes (tanto el total como el activo) y las superficies de las cavidades. En el caso de la cavidad cilíndrica, el radio también varía con la variación de la frecuencia de modulación del haz excitador. Para esta cavidad se tuvo en cuenta una variación correspondiente en su longitud a fin de igualar su volumen iluminado con el de las cavidades esférica y semiesférica.

En estas condiciones, el factor de calidad para todas las cavidades mencionadas es independiente de la frecuencia, y su valor está dado en la tabla 1.

Cavidad	Valor
Semiesférica	155
Esférica	210
Cilíndrica	551

### Conclusiones

Los resultados obtenidos mediante el cálculo, figura 3, muestran que, a cualquier frecuencia, la presión relativa en el punto de ubicación del micrófono es mayor en la cavidad esférica que en la semiesférica y en la cilíndrica, a igualdad de potencia de excitación, y con la posición de la fuente luminosa indicada más arriba.

Atribuimos el menor rendimiento de señal acústica de la cavidad semiesférica, con relación a la cavidad esférica, al hecho de que el plano que cierra la semiesfera no es ideal; no es un espejo acústico perfecto por lo que magnifica las pérdidas que, en el cálculo, están relatadas por la conductividad acústica específica  $\zeta$ .

Una ventaja de la forma de montaje de la fuente luminosa, en el centro geométrico de la cavidad esférica o el centro de la superficie plana en la semiesférica, es que el ingreso del haz luminoso a la cavidad no atraviesa ventanas, como sí lo hace en el caso de la cavidad cilíndrica.

Otra ventaja del montaje aludido, es que permite la utilización de leds como fuentes luminosas fácilmente modulables electrónicamente hasta los  $10 \text{ kHz}$ .

### Referencias

- 1.- A. Miklós and P. Hess "Application of acoustic resonators in photoacoustic trace gas analysis and metrology", Rev. Sci. Instrum., vol 72, 1937-1955, (2001).
- 2.- P.M. Morse and K.U. Ingard "Theoretical Acoustics", Chapter 6, McGraw-Hill Inc., 1968.
- 3.- V.V. Nikolski "Electrodinámica y propagación de ondas de radio", Editorial Mir Moscú, 1976.

- 4.- C.R. Wylie "Advanced Engineering Mathematics"  
McGraw-Hill Book Company, 1966.
- 5.- Ladaga J. L. y Mosquera C. F. "Cavidad resonante  
cilíndrica de sección elíptica para el análisis de señales  
optoacústicas", Anales AFA, vol. 17, 73-76 (2005).