

# Cálculo de Índices Fractales y Multifractales: Límites y Alcances

J.R. Busch y S.C. Gabbanelli

Departamento de Matemática - Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires  
Pasco Colón 850 (1063) Buenos Aires  
e-mail: jbusch@tron.fi.uba.ar

En este trabajo nos dedicamos al análisis de técnicas usuales en el tratamiento de datos experimentales, buscando detectar la fuente precisa de las anomalías en el cálculo de índices fractales y multifractales, y proponiendo mejoras en la concreción de los métodos de ajuste ligados a este cálculo. Este análisis permite también justipreciar el aporte del estudio de estos índices y las causas de su variación a la descripción cualitativa de los fenómenos de escala.

In this work we discuss some techniques usual in the treatment of experimental data, trying to find out the source of anomalies stemming from the calculus of fractal and multifractal indices. We give some hints for improvements in the implementation of this algorithms, leading to automate the settlement involved in these calculi. This analysis leads also to appreciate the fruits of the study of these indices for a qualitative description of scaling phenomena.

## Introducción

Nuestro propósito es exponer resultados que hemos obtenido sobre aspectos algorítmicos y numéricos del cálculo de dimensiones fractales y espectros multifractales, de relevancia en el análisis de escala de transiciones de fase y fenómenos de crecimiento.

El estudio del formalismo multifractal ha avanzado en años recientes dando formalidad a algunos resultados básicos: se ha establecido su validez para el caso auto-similar continuo y para medidas de equilibrio<sup>1,2,3</sup> y se ha mostrado que no es válido para las medidas autosimilares discontinuas recientemente introducidas y analizadas por Riedi y Mandelbrot<sup>4</sup>. Tratamos los algoritmos de conteo de cajas basados en una función de partición

$$Z(q, \tau) = \sum_{\pi} p^q \varepsilon^{-\tau}$$

donde  $p$  indica la masa y  $\varepsilon$  el diámetro de un elemento de la partición  $\pi$ . En los aspectos numéricos se han probado diversos métodos y alternativas para superar las dificultades en el cálculo del espectro asociado a las zonas más ralas de la medida cuando  $q < 0^{5,6}$ . Para el algoritmo de tamaño fijo han sido propuestas y probadas recientemente<sup>7,8</sup> modificaciones muy promisorias.

En esta presentación nuestro trabajo se limita al análisis de los algoritmos de conteo de tamaño fijo (canónico) y al de masa fija (también llamado de reconstrucción de la densidad). Tomamos como programa base el código **C** de Jordi Mach (<http://www.qf.ub.es/area5/jordi>), de cuyo análisis pormenorizado surge de inmediato un hecho significativo: más allá de la descripción conceptual de los algoritmos, su implementación en **C** supone decisiones que exceden los aspectos técnicos de programación, y requieren fundamentación. El segundo hecho significativo, que buena parte de esta exposición está dedicada a demostrar, es que los resultados que se obtienen de esos programas dependen en buena medida de estas decisiones aparentemente técnicas.

Describimos los aspectos generales de los algoritmos de conteo de cajas, remitiéndonos al trabajo de Mach *et al.*<sup>9</sup>.

Hemos tratado de elegir ejemplos significativos para ilustrar los inconvenientes del cálculo, y en aquellos casos en que nuestro análisis lo justifica, sugerimos posibles procedimientos para obtener resultados consistentes entre los distintos métodos y con la teoría.

## Los algoritmos: esquema general

Tenemos un conjunto de *sitios* formando un *sustrato*, según un reticulado plano de  $N \times N$ . Estos sitios puede estar o no *ocupados* por una *partícula*. Una caja  $C$  cuadrada de lado  $\varepsilon$ , tiene una *masa*  $p(C)$ , el número de partículas que contiene. Las características que estudiamos, las dimensiones generalizadas<sup>10</sup>  $D_q$  y el espectro multifractal<sup>11</sup>  $(\alpha, f(\alpha))$ , fueron introducidas para describir el comportamiento estadístico a escala de la masa respecto al tamaño cuando éste se acerca a cero. Las técnicas que describimos se basan en distintas formas de extraer una *muestra* de pares tamaño-masa  $(\varepsilon_i, p_i)$ .

En los algoritmos de tamaño fijo, la muestra se estructura en distintos niveles de  $\varepsilon$ , se evalúan determinados promedios que permiten obtener un valor que notaremos genéricamente  $G(\varepsilon)$  en cada nivel, y se estima el exponente de escala  $g$  de  $G(\varepsilon)$  respecto a  $\varepsilon$  mediante la pendiente de la regresión de  $\ln(G(\varepsilon))$  vs.  $\ln(\varepsilon)$ :

$$G(\varepsilon) \propto \varepsilon^g \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Este exponente  $g$  es usado para calcular el espectro.

En los algoritmos de masa fija, la muestra se estructura en diversos niveles de  $p$ , se evalúan promedios a partir de los que se obtiene un valor que notaremos  $\tilde{G}(p)$ , se estima el exponente de escala  $\tilde{g}$  de  $\tilde{G}(p)$  respecto a  $p$ :

$$\tilde{G}(p) \propto p^{\tilde{g}} \quad p \rightarrow 0$$

mediante la pendiente de la regresión de  $\ln(\tilde{G}(p))$  vs.  $\ln(p)$ , y finalmente se usan relaciones teóricamente establecidas para estimar el espectro.

La problemática que nos ocupa gira en torno a las preguntas: cómo seleccionar la muestra, cómo dependen los resultados de esta decisión, y con qué fundamento se toma de esa manera.

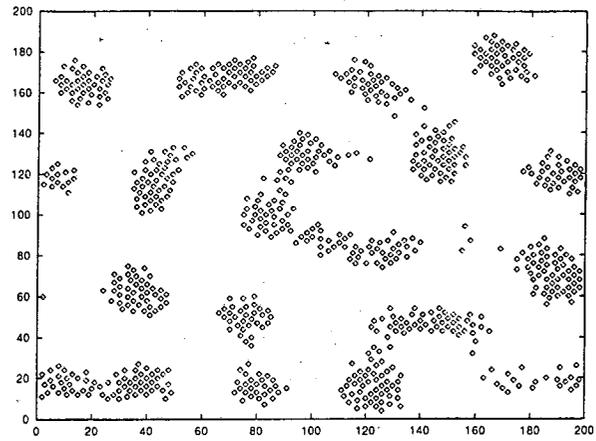
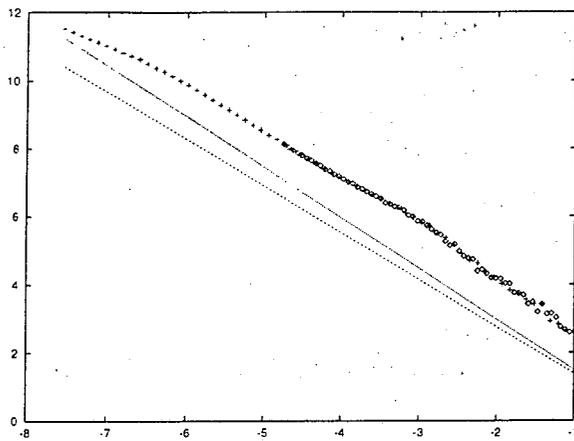


Figura 1: Izq: Ajuste del rango en la regresión. La parte sobrescrita de la curva es la seleccionada por el ajuste. Las rectas trazadas muestran la variación de la pendiente, originando estimaciones de la dimensión fractal de 1.38 y 1.49 con la modificación. Der: La configuración correspondiente, obtenida mediante simulación de Montecarlo.

### Un ejemplo: la dimensión por cajas

El programa que estima la dimensión fractal construye la muestra tomando para cada  $\epsilon$  una malla con cajas de tamaño  $\epsilon$ , jugando el papel de  $G$  en nuestro esquema general un promedio  $N(\epsilon)$  del número de cajas con masa positiva en la malla, de la siguiente manera: fijado un  $\epsilon$ , se elige un origen  $O$  al azar en el sustrato, con centro en ese origen se traza una malla formada por cajas de lado  $\epsilon$  cubriendo el sustrato, y se cuenta el número de estas cajas que tienen masa positiva,  $N_O(\epsilon)$ .

Reiterado este procedimiento con diversos orígenes, se forma el promedio  $N(\epsilon) = \langle N_O(\epsilon) \rangle$ . Hecho esto para valores de  $\epsilon$  logarítmicamente equiespaciados entre  $\epsilon_{min}$  y  $\epsilon_{max}$ , se aplica nuestro esquema general para obtener el exponente que en este caso es  $-D_f$ , siendo  $D_f$  la dimensión fractal: i.e. se realiza la regresión de  $\ln(N(\epsilon))$  vs  $\ln(\epsilon)$  para estimar el exponente en la relación

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D_f} \quad \epsilon \rightarrow 0$$

El problema que nos atañe es cómo fijar  $\epsilon_{min}$  y  $\epsilon_{max}$ , parámetros que el programa base define a partir de las dimensiones del sustrato, aunque permite el ajuste a posteriori de este rango, basado en la apreciación de la regresión.

Observamos en una diversidad de configuraciones un mismo fenómeno: para  $\epsilon$  pequeño, la curva de regresión se acerca a pendiente 0, como puede apreciarse en la Figura 1. Esto resulta comprensible de tenerse en cuenta que, cuando  $\epsilon$  está por debajo de la distancia media entre partículas, hay un efecto de finitud. Este efecto hace que la dimensión fractal sea artificialmente variable. En consecuencia, modificamos el programa tomando como  $\epsilon_{min}$  esta distancia media (estimada suponiendo una distribución uniforme). Este efecto fue observado por Dubrulle<sup>12</sup>, y la alternativa que proponemos analizada y descartada, por su inconsistencia con la necesidad de aproximarse al límite  $\epsilon \rightarrow 0$  y la consiguiente pérdida de información acerca de la dimensión. Sin embargo, en nuestro análisis de configuraciones obtenidas por simulación de Montecarlo donde persisten componentes puramente aleatorias por efecto térmico, hemos comprobado la utilidad de esta técnica para corregirlo.

### Espectro multifractal: tamaño fijo

Se trata de describir la curva espectral  $(\alpha, f(\alpha))$ , parametrizada por la "temperatura inversa" $q$ <sup>13</sup>. Considerando en este caso  $\epsilon$  constante<sup>9</sup>, la función de partición en la que se basa el análisis resulta

$$Z(q, \tau) = \epsilon^{-\tau} \sum_{\pi} p^q$$

La muestra se obtiene de la misma manera que en el caso anterior pero se calculan para cada  $\epsilon$  promedios (respecto a diversos orígenes  $O$ )

$$\begin{aligned} \log(A(q, \epsilon)) &= \langle \log(A_O(q, \epsilon)) \rangle \\ &= \langle \sum_i \hat{p}_i \log(p_i) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(F(q, \epsilon)) &= \langle \log(F_O(q, \epsilon)) \rangle \\ &= \langle \sum_i \hat{p}_i \log(\hat{p}_i) \rangle \end{aligned}$$

donde  $i$  es un índice para recorrer las cajas de cada partición regular de lado  $\epsilon$  y  $\hat{p}_i$  es la normalización

$$\hat{p}_i = \frac{p_i^q}{\sum_j p_j^q}$$

Tomando entonces  $A(q, \epsilon)$  y  $F(q, \epsilon)$  como  $G(\epsilon)$  en nuestro esquema general se obtienen los exponentes de escala  $\alpha(q)$  y  $f(\alpha(q))$  respectivamente. Como ya comentamos en la introducción y comprobamos en nuestra experiencia, este algoritmo no permite obtener el espectro para  $q < 0$  salvo en casos muy especiales. A estos fines se adapta mejor el algoritmo de masa fija. Notemos que, como destacan Borgani *et al.*<sup>14</sup>, el algoritmo de masa fija tiene el inconveniente de mezclar diversas escalas, impidiendo distinguir regímenes que suelen variar con la escala cuando se trata con datos experimentales o simulados.

### Espectro multifractal: masa fija

Se describe la curva espectral  $(\alpha, f(\alpha))$ , parametrizada por la "energía libre" $\tau$ <sup>13</sup>. Teniendo en cuenta que en este caso  $p$  se considera constante, la función de partición en que se basa el análisis es

$$Z(q, \tau) = p^{q-1} \sum \epsilon^{-\tau} / N(p)$$

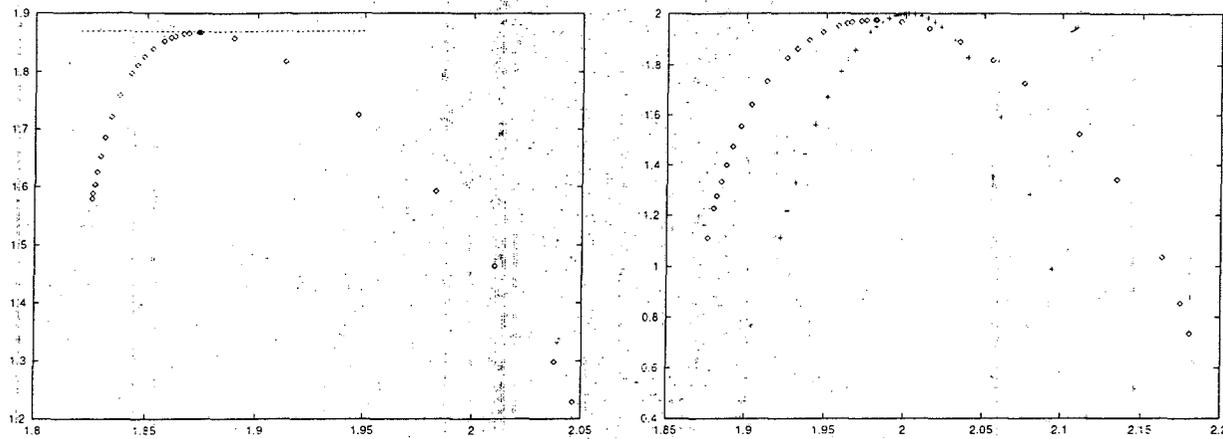


Figura 2: Izq: Curva espectral correspondiente al cluster infinito en el umbral de percolación de sitios (resultó innecesario el ajuste en este caso). Der: Curvas espectrales correspondientes al ambiente (puramente aleatorio) del cluster anterior. La curva cuyo máximo está sobre la recta horizontal correspondiente a la dimensión es la ajustada.

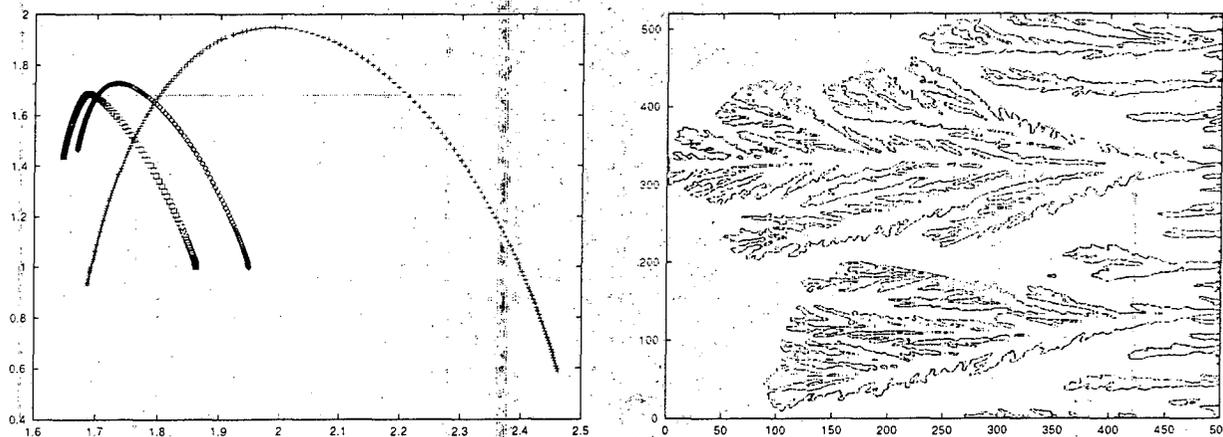


Figura 3: Izq: Diversas curvas espectrales, obtenidas con distintos rangos de  $p$ . La curva cuyo máximo está sobre la recta horizontal correspondiente a la dimensión es la ajustada. Der: La configuración correspondiente, obtenida por electrodeposición<sup>9</sup>.

Obsérvese que el segundo factor es un promedio respecto a la distribución definida por  $p$ , en una muestra de pares  $(p, \epsilon)$  que, a diferencia del caso anterior, no proviene de una partición del dominio.  $N(p)$  es el número de ejemplares de la muestra en los que se obtuvo masa  $p$ . Vale este comentario para los promedios en las siguientes estimaciones

$$\log(\bar{A}(\tau, p)) = (1/N(p)) \sum_i \hat{\epsilon}_i \log(\epsilon_i)$$

$$\log(\bar{F}(\tau, p)) = (1/N(p)) \sum_i \hat{\epsilon}_i \log(\hat{\epsilon}_i)$$

donde  $i$  es un índice para recorrer las cajas de la muestra con masa  $p$  y

$$\hat{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_i^{-\tau}}{(1/N(p)) \sum_j \epsilon_j^{-\tau}}$$

Tomando entonces  $\bar{A}(\tau, p)$  y  $\bar{F}(\tau, p)$  como  $\bar{G}(p)$  en nuestro esquema general se obtienen los exponentes de escala  $\bar{\alpha}(\tau)$  y  $\bar{f}(\bar{\alpha}(\tau))$  respectivamente. El espectro se determina entonces por las relaciones

$$\alpha(q) = \frac{1}{\bar{\alpha}(\tau)}$$

$$f(\alpha(q)) = \frac{1 + \bar{f}(\bar{\alpha}(\tau))}{\bar{\alpha}(\tau)}$$

En la aplicación de este algoritmo resulta crucial la determinación del rango de  $p$ . Para diferentes rangos las curvas espectrales son a veces cualitativamente satisfactorias, pero cuantitativamente inconsistentes. Proponemos ajustar el rango para lograr la consistencia cuando se conoce  $D_f$ : es sabido que  $\tau(0) = -D_f$ , y se puede determinar el rango de  $p$  buscando que en la regresión para  $\tau = -D_f$  la pendiente sea 1, consistente con la teoría<sup>9</sup>. Definida la variación de  $p$ , de las regresiones para distintos valores de  $\tau$ , puede obtenerse la curva espectral. Modificamos el programa base para permitir este ajuste en el rango de  $p$ , logrando notables mejoras. En la Figura 2(Izq) mostramos la curva espectral para el cluster infinito (cerca del umbral de percolación de sitios), donde se obtiene sin ajuste la dimensión estimada por otro método 1.87, y en la Figura 2(Der) curvas espectrales para el entorno puramente aleatorio donde se forma este cluster, fue necesario el ajuste para obtener la dimensión 2. En la Figura 3 se muestra el corrimiento en la curva espectral debido al ajuste en el rango de  $p$  para ubicar el máximo en  $D_f = 1.68$ , para una configuración obtenida por electrodeposición<sup>9</sup>. En la Figura 4, mostramos

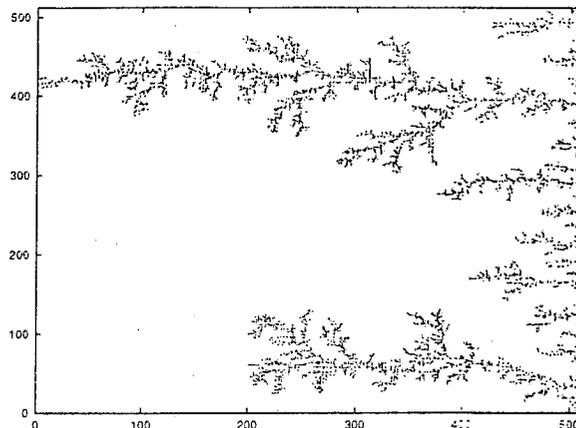
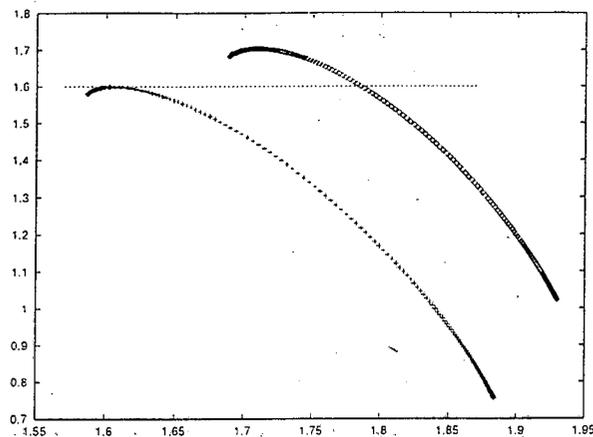


Figura 4: Izq: Curvas espectrales del modelo de ruptura dieléctrico ( $\eta = 1.2$ ). La curva cuyo máximo está sobre la recta horizontal correspondiente a la dimensión es la ajustada. Der: Configuración correspondiente a las curvas espectrales<sup>15</sup>.

un fenómeno similar para una configuración obtenida por simulación del modelo de ruptura dieléctrico ( $\eta = 1.2$ ).

### Conclusiones

Al calcular curvas espectrales, es necesaria gran prudencia en el uso de estos programas, hasta que se fundamenten algoritmos más fiables. Nuestro criterio de consistencia entre distintos resultados ofrece una alternativa.

### Referencias

- 1- L. Olsen, Adv. Math. **116**, 82 (1995).
- 2- R. Cawley y R. D. Mauldin, Adv. Math. **92**, 196 (1992).
- 3- Y. Pesin y H. Weiss, J. Stat. Phys. **86**, 233 (1997).
- 4- R. Riedi y B. Mandelbrot, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **123**, 133 (1998).
- 5- M. Yamaguti y C. Prado, Phys. Lett. A **206**, 318 (1995).

- 6- D. Veneziano, G. Moglen, y R. Bras, Phys. Rev. E **52**, 1387 (1995).
- 7- R. Pastor-Satorras y R. Riedi, J. Phys. A **29**, L391 (1996).
- 8- M. Alber y J. Peinke, Phys. Rev. E **57**, 5489 (1998).
- 9- J. Mach, F. Mas, y F. Sagués, J. Phys. A **28**, 5607 (1995).
- 10- H. G. E. Hentschel y I. Procaccia, Physica **8D**, 435 (1983).
- 11- T. C. Halsey, M. Jensen, I. Kadanoff, I. Procaccia y B. Shraiman, Phys. Rev. A **33**, 1141 (1986).
- 12- B. Dubrulle y M. Lachikze-Rey, Astron. Astrophys. **289**, 667 (1994).
- 13- H. E. Stanley, *Fractals and Disordered Systems* (Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1991), pp. 1-45.
- 14- S. Borgani, G. Murante, A. Provenzale, y R. Valdamini, Phys. Rev. E **47**, 3879 (1993).
- 15- P. Arenillas, Modelización de fingering viscoso, 1997, tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas (UBA).