

PATRONES DE ROTACIÓN DE LÁMINAS RETARDADORAS

ROTATION PATTERNS FOR WAVEPLATES

Francisco E. Veiras^{1*}, Liliana I. Perez^{1,2}

¹ Grupo de Óptica y Visión - Departamento de Física - Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires
Paseo Colón 850 - (C1063ACV) - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina.

² CONICET

e-mail: fveiras@fi.uba.ar

Algunas de las características del comportamiento de las láminas retardadoras o placas de cristal uniaxial al ser rotadas frente a un haz láser incidente fueron relevadas experimentalmente por distintos autores. Sin embargo, muchos de estos resultados distan de ser lo esperado para una lámina plano-paralela ideal con incidencia normal al ser rotada alrededor de la normal a las interfaces. En este trabajo se analiza la transmisión a través de láminas rotantes en distintas condiciones de giro, considerando que el eje óptico puede ser o no paralelo a las caras de la lámina. Los resultados obtenidos describen con muy buena aproximación las mediciones realizadas por otros autores. Adicionalmente, se propone un método de medición para determinar si el eje óptico de una lámina es paralelo a las interfaces.

Palabras Claves: retardadores, placas uniaxiales, birrefringencia

Some of the characteristics of the behaviour of rotating retarder wave plates or uniaxial crystal plates when they are illuminated by a laser were investigated experimentally by different authors. Nevertheless, many of their results were almost unexpected for an ideal plane-parallel uniaxial plate with normal incidence and rotated around the normal to the interfaces. In this work we analyse the transmission through rotating uniaxial plates with different rotation conditions. We consider that the optical axis can be either parallel or not parallel to the faces of the plate. The obtained results describe with very good approach the measurements made by other authors. Additionally, we propose a measurement method in order to determine whether the optical axis is parallel or not to the faces of a uniaxial plane-parallel plate.

Key Word: retarders, uniaxial plates, birefringence

I. INTRODUCCIÓN

Las láminas retardadoras que se comercializan distan de ser ideales: placas perfectamente plano-paralelas y homogéneas con el eje óptico paralelo a las interfaces. Además de los efectos en la transmisión debidos a la orientación del eje óptico y forma del haz^{1,2}, pueden aparecer otros fenómenos cuando la lámina es usada como un elemento rotante dentro de un sistema óptico complejo como en los polarímetros astronómicos^{3,4,5}.

Algunas de las características del comportamiento de las láminas retardadoras al ser rotadas frente a un haz láser se relevaron sobre un detector optoelectrónico de posición continua suficientemente alejado del sistema⁶. Los autores presentan resultados en los que los haces transmitidos a través de la placa rotante describen figuras aproximadamente circulares cuyo centro corresponde a la posición de los haces ordinarios dentro de las incertezas de medición. Este resultado dista de ser lo esperado para una lámina retardadora ideal con incidencia normal al ser rotada alrededor de la normal a las interfaces. Si el eje óptico es paralelo a las interfaces y la incidencia es perpendicular a la placa ambos haces emergentes deberían estar superpuestos. Por lo tanto, al rotar la placa alrededor de un haz colimado que incide normalmente, se vería que ambos haces ordinario y extraordinario se superponen para cualquier giro. El estudio del efecto de la rotación no se ha aplicado solamente a láminas

retardadoras. En 1994 Shao et al⁷ investigaron experimentalmente el comportamiento de los rayos extraordinarios cuando el eje de rotación es normal a la placa, el eje óptico es paralelo a la interfaz y la incidencia es oblicua. También consideraron el caso en que el material birrefringente utilizado (calcita) tuviera su clivaje natural, pero siempre considerando que el eje de rotación era perpendicular a la placa. Notaron que para la primera geometría al rotar la placa en π el rayo extraordinario rotaba en 2π , que las figuras formadas eran elipses y que la Ley de Snell (considerada como idéntica a la de las interfaces isotropas) resultaba válida solamente en los casos de que el eje óptico fuera paralelo o perpendicular al plano de incidencia. En el segundo caso hicieron notar que las figuras descritas por el rayo extraordinario eran consistentes con las correspondientes a los llamados caracoles de Pascal (limaçon de Pascal), que corresponden a curvas de cuarto grado.

En este trabajo se hará una muy breve descripción de los efectos geométricos en la transmisión de rayos a través de placas plano-paralelas uniaxiales inmersas en un único medio. Se analizarán tres posibles tipos de rotaciones de las láminas, considerando que el eje óptico no es paralelo a las interfaces. En el primer tipo de rotación se supondrá que la incidencia es perfectamente normal a la placa. En el segundo se supondrá que la incidencia no es normal a la placa y que el eje de rotación coincide con la dirección del haz incidente. Finalmente,

se estudiará el caso en que el haz incida en forma oblicua pero que el eje de rotación sea perpendicular a la placa. En todos los casos, la intersección entre el eje de rotación y la dirección de incidencia se produce sobre la cara superior de la lámina.

II. TRANSMISIÓN A TRAVÉS DE PLACAS PLANO-PARALELAS UNIAXIALES

Como ha sido ampliamente estudiado^{2,8,9}, en una interfaz formada por un medio isótropo de índice de refracción n y un material uniaxial de índices principales n_o y n_e , los rayos incidentes y refractados no pertenecen al mismo plano excepto en condiciones de simetría (eje óptico paralelo o perpendicular al plano de incidencia). El rayo refractado extraordinario pertenece, en general a otro plano y que en el caso de orientación arbitraria del eje óptico no resulta perpendicular a la interfaz (salvo el caso en que el eje óptico esté contenido en el plano de incidencia).

Al alcanzar la segunda interfaz (Fig.1), el rayo ordinario incide en un punto P_o dado por^{1,2}

$$l'_i = L \frac{n \sin \alpha}{(n_o - n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \quad (1)$$

mientras que el extraordinario incide en un punto P_e con coordenadas dadas por

$$l''_i = L \left(\frac{h_{xi}}{h_x} + \frac{n_o h_{\sigma} n \sin \alpha}{h_x (n_e^2 h_x - h_{\sigma} n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right) \quad (2)$$

$$l''_{\sigma} = L \left(\frac{h_{x\sigma}}{h_x} + \frac{n_o h_{\sigma} n \sin \alpha}{h_x (n_e^2 h_x - h_{\sigma} n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right) \quad (3)$$

donde

$$h_x = n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2)(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{x})^2 \quad (4)$$

$$h_{\sigma} = n_e^2 - (n_e^2 - n_o^2)(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{\sigma})^2 \quad (5)$$

$$h_{xi} = (n_e^2 - n_o^2)(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{x})(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{i}) \quad (6)$$

$$h_{x\sigma} = (n_e^2 - n_o^2)(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{x})(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{\sigma}) \quad (7)$$

$$h_{\sigma i} = (n_e^2 - n_o^2)(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{\sigma})(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{i}) \quad (8)$$

y $(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{x})$, $(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{i})$ y $(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{\sigma})$ indican las proyecciones del eje óptico sobre la normal a la interfaz, sobre la interfaz en el plano de incidencia y perpendicular a él, respectivamente. De las expresiones obtenidas se deduce que para incidencia normal, el punto de incidencia del rayo extraordinario no corresponde al punto $(L,0,0)$, a menos que el eje óptico sea paralelo a las interfaces. En efecto, cuando la incidencia es normal, de las ecs.(2) y (3) se deduce que el punto de incidencia del rayo extraordinario sobre la cara inferior de la placa está dado por

$$l''_i \Big|_{\alpha=0} = L \frac{h_{xi}}{h_x} \quad (9)$$

$$l''_{\sigma} \Big|_{\alpha=0} = L \frac{h_{x\sigma}}{h_x} \quad (10)$$

que resultan nulos solamente cuando el eje óptico es paralelo o normal a la placa.

Si la incidencia es perpendicular a la placa, el rayo emergente proveniente del ordinario es colineal al incidente, pero el proveniente del extraordinario se desplaza del origen de coordenadas en una dirección preferencial: la dirección z (que corresponde a la proyección del eje óptico z_3 sobre la interfaz). Este desplazamiento puede ser positivo o negativo dependiendo no solamente de la birrefringencia sino también de la orientación del eje óptico respecto a la interfaz

$$A = -L \frac{(n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta}{n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta} \quad (11)$$

donde $\cos \theta \equiv (\tilde{z}_3 \cdot \tilde{z})$ y $\sin \theta \equiv -(\tilde{z}_3 \cdot \tilde{x})$.

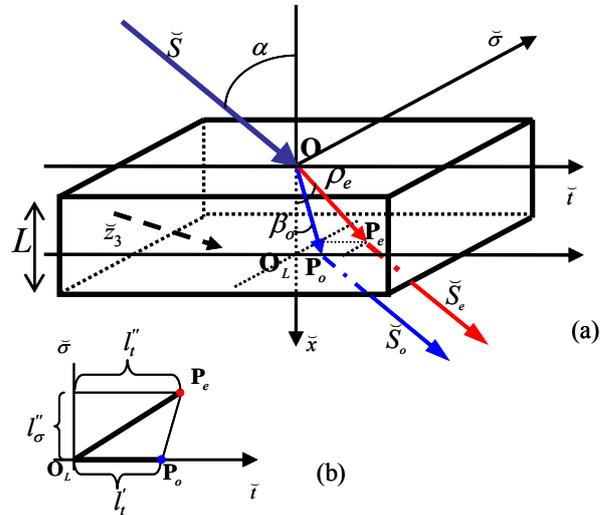


Figura 1. (a) Transmisión ordinaria y extraordinaria a través de una placa plano-paralela de material uniaxial. (b)Detalle del desplazamiento sobre la segunda interfaz.

A partir de estos resultados es posible estudiar con detalle los efectos geométricos cuando incide un haz de luz sobre una placa plano-paralela rotante.

III. EFECTOS DE LA ROTACIÓN DE LA PLACA

Como los rayos que emergen de la placa, provenientes de la refracción ordinaria y de la extraordinaria, resultan paralelos al rayo incidente, aunque recorran trayectorias no paralelas al propagarse por la placa, la distancia entre ellos no se modifica después de atravesarla. Por este motivo, la distancia que se registra entre los haces emergentes ordinarios y extraordinarios no depende de la distancia a la que se sitúa el detector. En esta Sección haremos el estudio de los distintos efectos producidos por tres tipos de rotaciones de láminas plano-paralelas sobre las que incide un haz estrecho perfectamente colimado.

Caso 1

Consideraremos como primer caso el más sencillo de analizar: el eje de rotación coincidente con la dirección del rayo incidente y normales a la placa (Fig.2)

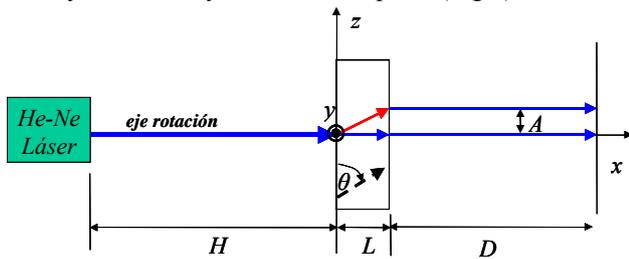


Figura 2 Esquema de un banco de medición con incidencia perpendicular a la placa y eje de giro coincidente.

En esta situación “ideal”, al girar la placa se obtendrá una figura en forma de circunferencia de radio A para los rayos extraordinarios y un único punto para los ordinarios (centro de la circunferencia) como la indicada en la Fig. 3.

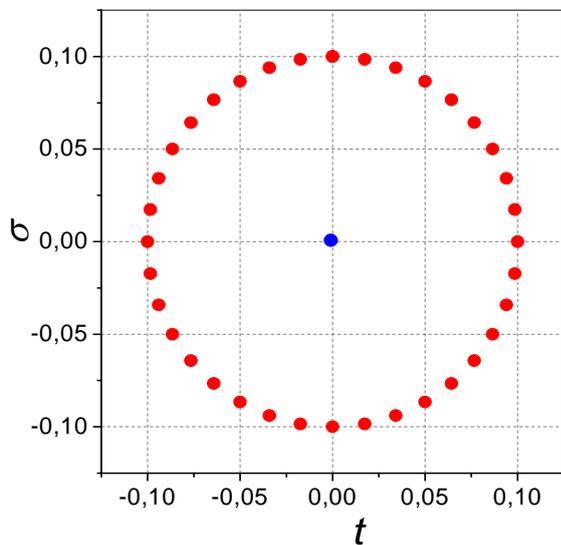


Figura 3. Patrón de rotación en las condiciones de la Fig.2 para una placa de calcita de espesor $L=1\text{mm}$ en aire y $\theta=35^\circ$, $n_o=1.6584$ y $n_e=1.4865$ ($\lambda=632.8\text{nm}$). Las distancias están expresadas en mm.

Como es de esperar por la simetría de la experiencia, si el eje óptico es paralelo o perpendicular a las interfaces, los haces transmitidos ordinario y extraordinario se superponen y se obtiene un único punto luminoso en la dirección de incidencia.

Caso 2

Para comprender el patrón que se puede obtener en el caso en que la placa tenga una cierta inclinación α respecto al eje de rotación, resulta muy útil establecer cuál es el comportamiento del rayo ordinario transmitido, que en este aspecto tendrá el mismo comportamiento que un rayo que incide con estas características sobre una placa isotrópica (Fig.4). La distancia entre el punto luminoso y el eje de rotación dependerá del ángulo α de forma tal que

$$r_o = L \sin \alpha \left[1 - \frac{n \cos \alpha}{(n_o^2 - n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right] \quad (12)$$

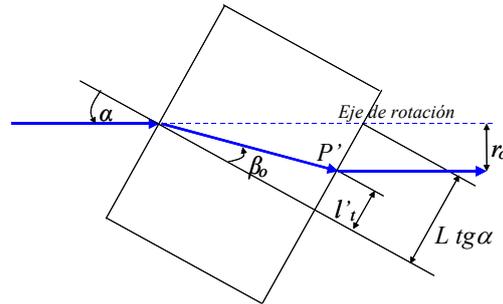


Figura 4. Patrón de rotación de una lámina isotrópica cuando la normal a la placa forma un ángulo α con el eje de rotación y la dirección del rayo incidente.

De manera similar, para el rayo transmitido extraordinario, la distancia al eje de rotación r_e es

$$r_e = L \left\{ t_o^2 + \cos^2 \alpha [\tan \alpha - t_o^2]^2 \right\}^{1/2} \quad (13)$$

El sistema xyz (Fig.5) rota en torno al rayo incidente, lo que lleva a que el ángulo entre el eje óptico y el rayo incidente tampoco se modifique al rotar la lámina. Por

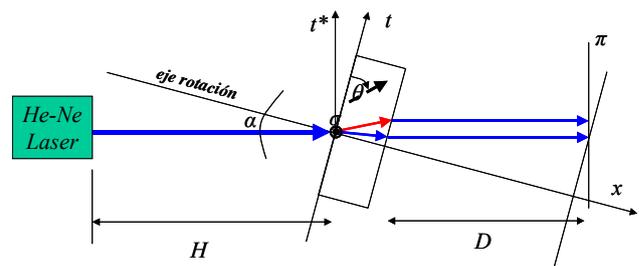


Figura 5. Esquema del banco de medición cuando la normal a la placa forma un ángulo α con el eje de rotación y la dirección del rayo incidente.

este motivo las distancias r_o y r_e resultan independientes de cuánto rotó la placa (con inclinación constante) y los rayos ordinarios y extraordinarios describen circunferencias concéntricas. En la Fig.6 se ven claramente ambos patrones para una placa de calcita cuando el eje óptico tiene una inclinación que corresponde a la máxima separación entre rayos ordinario y extraordinario para incidencia normal. Es de hacer notar que r_e dependerá de la orientación relativa entre el haz incidente y el eje óptico, lo que está expresado en su dependencia de los ángulos α y δ .

Si la inclinación α de la placa es pequeña, el radio que describe el ordinario podría ser imperceptible (pues para $\alpha=0^\circ$ se anula) frente al descrito por el extraordinario. De este modo, teniendo en cuenta la incerteza del punto de incidencia del ordinario ($6\mu\text{m}$) considerada por los autores en la Ref. 6, podría considerarse que los resultados inesperados se deben a una disposición como la de la Fig.5 con el eje óptico no paralelo a las interfaces.

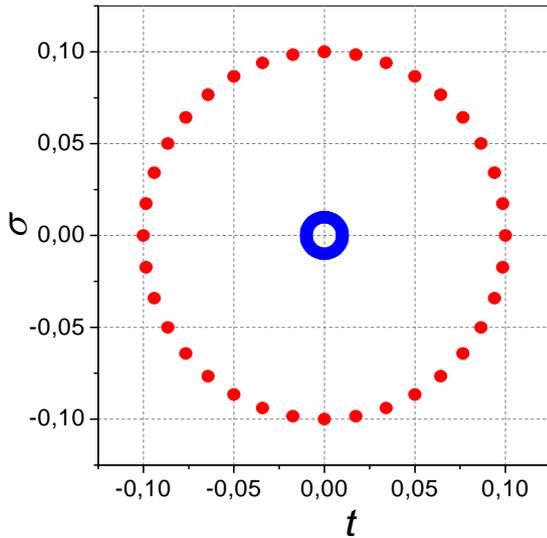


Figura 6. Patrón de rotación en las condiciones de la Fig.5 para una placa de calcita de espesor $L=1$ mm. en aire $\alpha=2^\circ$ y $\theta=48.12$, $n_o=1.6584$ y $n_e=1.4865$ ($\lambda=632.8$ nm). Las distancias están expresadas en mm.

Caso 3

Consideraremos, por último, el caso en que el eje de rotación sea normal a la placa (eje x de la Fig.7) pero no coincida con la dirección del rayo incidente (que forma un ángulo α con la normal). El plano de incidencia no cambia al rotar la placa ya que éste está definido por la dirección de incidencia y el eje de rotación. El rayo ordinario no cambiará su posición mientras se rota la placa pero, contrariamente, el rayo proveniente del extraordinario variará su posición sobre el plano π .

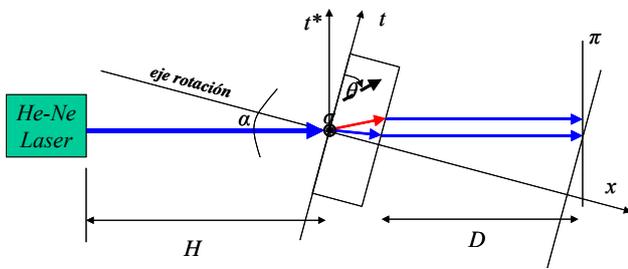


Figura 7. Esquema del banco de medición cuando el eje de rotación coincide con la normal a la placa y la incidencia es oblicua.

A partir de las ecs. (1)-(3) se obtienen fácilmente las posiciones de los puntos sobre un plano perpendicular al eje de rotación

$$l_i = L \frac{n \sin \alpha \cos \alpha}{(n_o - n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \quad (14)$$

$$l_i^* = L \left(\frac{h_{xi}}{h_x} + \frac{n_o h_\sigma n \sin \alpha}{h_x (n_e^2 h_x - h_\sigma n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right) \cos \alpha \quad (15)$$

$$l_\sigma^* = L \left(\frac{h_{x\sigma}}{h_x} + \frac{n_o h_\sigma n \sin \alpha}{h_x (n_e^2 h_x - h_\sigma n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right) \quad (16)$$

Cuando el eje óptico está contenido en las interfaces, resulta evidente que al rotar la lámina en 2π , existirán dos ángulos de giro para los cuales el ángulo entre la dirección del eje óptico y la dirección de incidencia es la misma. Es por ello que los puntos de incidencia para δ entre 0° y 180° coinciden con los que se obtienen al completar el giro para δ entre 180° y 360° , como se puede apreciar en la Fig.8 (los puntos se superponen de a dos).

Cuando el eje óptico forma otro ángulo con la interfaz, la situación cambia. Las figuras obtenidas sobre el plano de observación toman formas más complejas (caracoles de Pascal) y los puntos correspondientes a dos rayos no se superponen. En la Fig.9 a) se indican los puntos luminosos en la pantalla de observación cuando el eje óptico forma un ángulo de $5/100$ de grado con las interfaces. A medida que el ángulo θ aumenta, los diagramas se deforman, llegando a describir figuras próximas a circunferencias cuando el ángulo θ es cercano a $\pi/4$. Estas figuras que describen los rayos extraordinarios, obtenidas analíticamente, concuerdan con las obtenidas experimentalmente por Shao y Yi⁵.

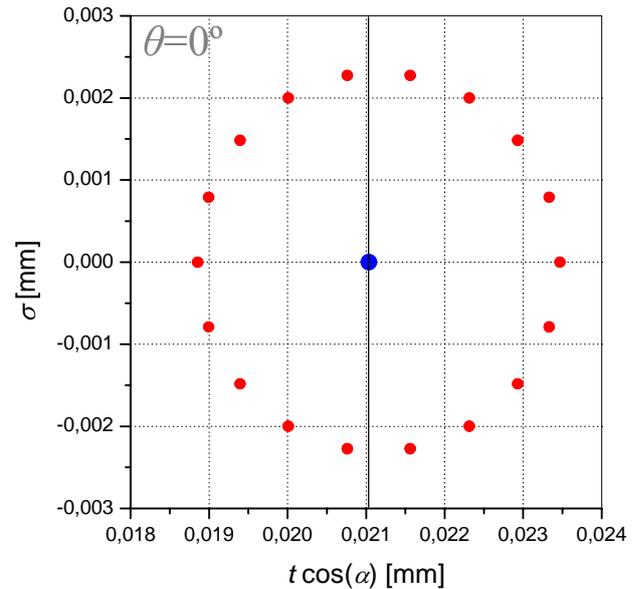


Figura 8. Patrón de rotación en las condiciones de la Fig.7 para una placa de calcita de espesor $L=1$ mm. en aire $\alpha=2^\circ$ y $\theta=0$, $n_o=1.6584$ y $n_e=1.4865$ ($\lambda=632.8$ nm). Las distancias están expresadas en mm.

IV. PROPUESTA PARA DETERMINAR LA ORIENTACIÓN DEL EJE ÓPTICO EN UNA PLACA PLANO-PARALELA UNIAXIAL

Los efectos de rotar la placa alrededor de la normal a la misma sugieren un método para determinar si el eje óptico es paralelo o no a las superficies de una placa plano-paralela.

Como puede deducirse de ecs. (15) y (16), cuando el eje óptico es paralelo a las interfaces la relación entre el

apartamiento del rayo ordinario l'_{i^*} y el semieje de la elipse que yace sobre el eje z es constante, es decir

$$\left[\frac{l'_{i^*}|_{\delta=0}}{l'_{i^*}} \right]_{\theta=0^\circ} = \frac{n_e}{n_o} \quad (17)$$

De modo que si se rota la placa alrededor del eje x (Fig. 7) para distintos ángulos de inclinación α , se debería poder comprobar que la relación entre la distancia entre el punto de incidencia del rayo ordinario y el punto correspondiente al extraordinario para $\delta=0^\circ$ (plano de incidencia paralelo al eje óptico), es constante. En cambio, cuando el eje óptico no es paralelo a las

interfaces la relación resulta dependiente de α . A partir de la ecs. (15) y (16) se obtienen las coordenadas sobre el plano de detección para el rayo extraordinario cuando $\delta=0^\circ$

$$l'_{i^*}|_{\delta=0} = \frac{L}{h_x} \left\{ -(n_e^2 - n_o^2) \sin\theta \cos\theta + \frac{nn_o n_e \sin\alpha}{(h_x - n^2 \sin^2\alpha)^{1/2}} \right\} \cos\alpha \quad (18)$$

$$l'_{\sigma}|_{\delta=0} = 0 \quad (19)$$

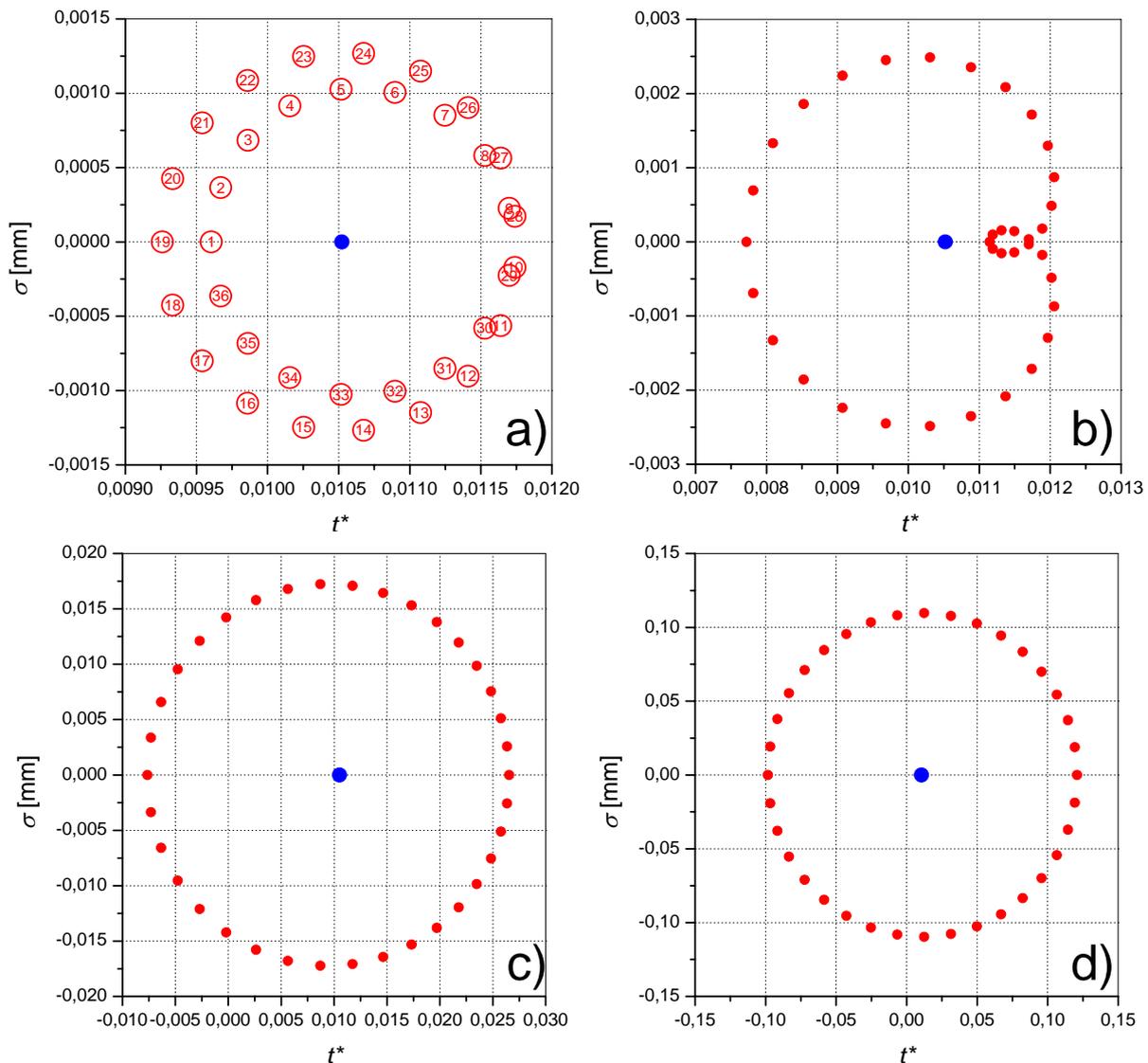


Figura 9. Puntos de incidencia sobre el plano de observación. La lámina es de calcita con espesor $L=1$ mm. en aire $\alpha=1^\circ$ y a) $\theta=0,05^\circ$, b) $\theta=0,5^\circ$, c) $\theta=5^\circ$, d) $\theta=48,12^\circ$. Las distancias están expresadas en mm.

Efectuando el cociente entre (18) y (14)

$$\frac{l'_{i^*}|_{\delta=0}}{l'_{i^*}} = \frac{(n_o^2 - n^2 \sin^2\alpha)^{1/2}}{h_x n \sin\alpha} \left\{ -(n_e^2 - n_o^2) \sin\theta \cos\theta + \frac{nn_o n_e \sin\alpha}{(h_x - n^2 \sin^2\alpha)^{1/2}} \right\} \quad (20)$$

se comprueba la dependencia con el ángulo α , lo que se grafica en la Fig. 10. En la Fig. 10a) se aprecia la relación expresada en la ec.(20) para $\theta=0,1^\circ$ y en línea punteada para el caso $\theta=0^\circ$. En la Fig. 10b) se grafica la relación para $\theta=48,12^\circ$.

V. CONCLUSIONES

A partir del análisis del comportamiento de un rayo luminoso que se transmite a través de una placa plano-paralela de material uniaxial con orientación arbitraria del eje óptico, pudimos determinar las figuras que los rayos ordinario y extraordinario describen sobre un plano perpendicular a la dirección de incidencia cuando la placa es rotada. Se consideraron tres posibilidades respecto a las direcciones relativas del eje de rotación y la dirección de incidencia. Los resultados obtenidos fueron aplicados a dos experiencias dadas en la Bibliografía. Como en los

diagramas obtenidos en la Ref. 6 la variación de la posición del punto de incidencia del rayo proveniente del ordinario es mucho menor que la del extraordinario, si bien podrían suponerse otros defectos, suponer que el eje óptico forma un ángulo θ con las interfaces sería adecuado ya que afecta exclusivamente a la dirección del rayo extraordinario. Para las experiencias realizadas en Ref. 7 los resultados concuerdan con los obtenidos analíticamente. Por último, se propuso un método de medición para estimar el alejamiento de la orientación de eje óptico con las interfaces.

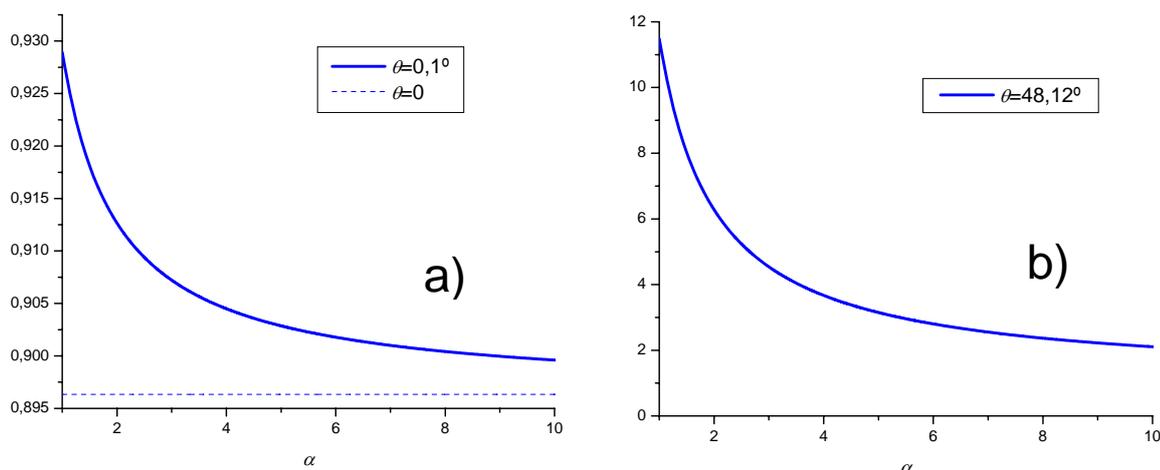


Figura 10. Cociente entre el apartamiento del rayo ordinario y el semieje de la elipse dado por ec.(20) en función del ángulo de incidencia para distintas orientaciones del eje óptico.

Referencias

- 1- M. C. Simon, K. V. Gottschalk, *Optik* **118**, 457-470 (2007)
- 2- M. C. Simon, L. I. Perez, F. E. Veiras, *Parallel beams and fans of rays in uniaxial crystals*, AIP Proceedings of the 6th Iberoamerican Meeting on Optics and 9th Latin American Meeting on Optics, Lasers and Their Applications **CP992** 714-719 (2008)
- 3- Magalhaes, A. M., Benedetti, E., & Roland, E. H. *A Photoelectric Polarimeter with Tilt-Scanning Capability*, *Astron. Soc. Pacific. Pub.* **96**, 383 (1984)
- 4- Scott Tyo J., Wei Han, *Appl. Opt.* **45** 5497-5503
- 5- Complejo Astronómico El Leoncito. www.casleo.gov.ar/
- 6- Cortizo E.C., Videla, F.A. Garavaglia, M.J. *Continuous position detector: study of retardation plates*, Proceedings of the International Symposium on Laser Metrology for Precision Measurement and Inspection in Industry. Florianópolis, 60-64 (1999).
- 7- Shao Z. y Yi C. *Appl. Opt.* **33**, 1209-1212 (1994).
- 8- M. C. Simon, *Appl. Opt.* **22**, 354-360 (1983)
- 9- M. C. Simon and R. M. Echarri, *Appl. Opt.* **25**, 1935-1939 (1986)

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo de un Subsidio UBACYT.