

CALIBRACIÓN DE FRECUENCIAS ÓPTICAS POR BATIDO DE FRECUENCIAS

OPTIC FREQUENCY CALIBRATION BY BEAT FREQUENCY

M.G. Mingolla, J.A. Álvarez, K.B. Bastida

Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI) – Centro INTI – Física y Metrología
Avenida General Paz 5445 – (B1650KNA) – San Martín – Buenos Aires - Argentina
e-mail: mingolla@inti.gob.ar

Se implementó un sistema de batido de frecuencias ópticas, (sistema heterodino) que permite la calibración en frecuencia por comparación de láseres estabilizados, usando un fotodiodo de avalancha. Con este sistema de medición se obtiene una incertidumbre relativa del orden de $1 \cdot 10^{-10}$, resultado que finalmente estará limitado por la repetibilidad y estabilidad del láser a calibrar. En el presente trabajo se compara un láser de He-Ne (633 nm) contra un láser He-Ne/I₂, (Patrón primario de longitud). La medición de la frecuencia de batido se realizó utilizando un contador cuya base de tiempo fue referida al reloj de Cs Patrón primario de tiempo y frecuencia. La automatización de las mediciones permitió además realizar estudios de la estabilidad del láser He-Ne mediante el análisis de su varianza de Allan. La implementación de este sistema en INTI constituye una significativa mejora en nuestro país de la realización y diseminación del metro, unidad de longitud del Sistema Internacional de Unidades.

Palabras Claves: Calibración, Batido, Frecuencia, Heterodino.

A heterodyne frequency system that allows frequency calibration of a stabilized laser was implemented using an avalanche photodiode. With this measuring system a relative uncertainty of $1 \cdot 10^{-10}$ was achieved. Although this result is limited by the repeatability and stabilization of the laser under calibration. In this article a He-Ne laser (633nm) is compared to a He-Ne/I₂ laser (Primary Standard of length). The measuring of the beating frequency was done using a counter locked to a Cs clock (Primary Standard of time and frequency). The measuring automation also allowed making a study of the stability of the He-Ne laser by means of an Allan Variance analysis. The development of this type of measuring at INTI is a significant improvement in our country for the realization and dissemination of the meter, the length's unit of the International System of Units

Key Word: Calibration, Beat, Frequency, Heterodyne.

I. INTRODUCCIÓN

En el año 1983⁽¹⁾ en la 17^{ma} Conferencia General sobre Pesas y Medidas, se adoptó la actual definición del metro que establece que $1 \text{ m} = c_0 \times 1/299792458 \text{ s}$ (donde $c_0 = 299792458 \text{ m/s}$ es el valor adoptado para la velocidad de la luz en el vacío). En el mismo año el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) estableció las instrucciones para la realización de la nueva definición del metro. Con este fin los Institutos Nacionales de Metrología de todo el mundo construyeron láseres estabilizados en las frecuencias patrones recomendadas por CIPM⁽²⁾. La radiación más utilizada es la de los láseres de He-Ne estabilizados sobre líneas de absorción del ¹²⁷I₂ (633 nm). Estos láseres constituyen la realización primaria del metro en la mayoría de Institutos Nacionales de Metrología y son utilizados como patrones de frecuencia óptica para calibrar, por comparación, otras fuentes de radiación.

En este trabajo se describe la calibración en frecuencia, trazable al láser de He-Ne/I₂ perteneciente al INTI, de un láser de He-Ne estabilizado (633 nm), por un método heterodino. El láser calibrado es empleado, junto con otro láser de He-Ne (543 nm), en un sistema de medición interferométrico con el que se mantiene el

patrón longitud, materializado a través de la calibración de bloques patrón, usados para dar de trazabilidad a las distintas ramas de la industria⁽³⁾.

Anteriormente la calibración de este láser se realizaba en longitud de onda por métodos interferométricos⁽⁴⁾. Los métodos interferométricos tienen la ventaja de permitir la calibración en un amplio espectro de frecuencias a diferencia de los métodos heterodinicos, como el que se describe en este trabajo. Pero con el método heterodino se obtuvo una incertidumbre relativa del orden de $1 \cdot 10^{-10}$ a diferencia del caso interferométrico donde se obtuvo una incertidumbre relativa del orden de $1 \cdot 10^{-8}$

Para la calibración en frecuencia se requiere que la diferencia de frecuencia entre la referencia y el mesurando no supere el GHz, debido a la respuesta del detector empleado, (APD210), es por este motivo que el alcance de este método se encuentra limitado por la cantidad de frecuencias de referencia con que cuenta un laboratorio de metrología. La forma de ampliar el espectro de frecuencias de referencia se consigue hoy en día a partir de un peine de frecuencias.

II. MONTAJE Y PRINCIPIO DE OPERACIÓN

Empleando un fotodiodo de avalancha se implementó un sistema heterodino de frecuencias ópticas, (sistema de

batido de frecuencias ópticas), que permite la calibración en frecuencia por comparación de láseres estabilizados.

Al superponer dos ondas de distinta frecuencia w_1 y w_2 de igual amplitud, E_{01} , se obtiene⁽⁵⁾

$$E(x,t) = 2E_{01} \cos(k_-x - w_-t) \cos(k_+x - w_+t) \quad (1)$$

donde k , representa el número de onda, y w su frecuencia, siendo estas cantidades.

$$k_{\pm} = \frac{1}{2}(k_1 \pm k_2) \quad w_{\pm} = \frac{1}{2}(w_1 \pm w_2) \quad (2)$$

La onda resultante se puede considerar como una onda de frecuencia w_+ que tiene una amplitud modulada $E_0(x,t) = 2E_{01} \cos(k_-x - w_-t)$. Cuando $w_1 \cong w_2$ resulta $w_+ \gg w_-$, por lo tanto mientras que $E_0(x,t)$ cambia lentamente, $E(x,t) = E_0 \cos(k_+x - w_+t)$ varía muy rápidamente. La intensidad de esta onda se puede expresar como

$$E_0^2(x,t) = 2E_{01}^2 [1 + \cos(2k_-x - 2w_-t)] \quad (3)$$

El campo $E_0^2(x,t)$ oscila en torno de $2E_{01}^2$ con una frecuencia $2w_-$, o lo que es lo mismo con $w_1 - w_2$. A esta frecuencia se la suele llamar frecuencia de batido,

$$w_1 - w_2 = w_{bat} \quad (4)$$

La ec.(4) describe el modelo de medición empleado en este trabajo. La frecuencia del láser a calibrar, se determina a partir de la medición de w_{bat} , y del valor de frecuencia de referencia de otro láser, siendo este el láser Patrón primario de longitud.

Para medir w_{bat} se montó el siguiente sistema heterodino, (ver Fig.1).

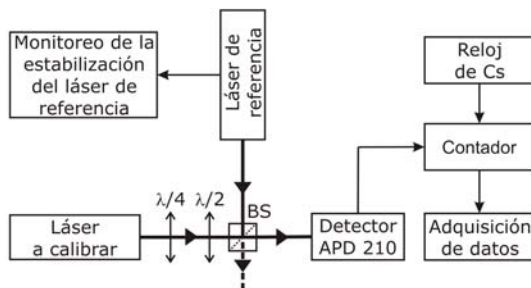


Figura 1. Diseño experimental utilizado en el estudio de batido de frecuencias.

El láser de referencia es un láser de He-Ne/I₂ linealmente polarizado (633 nm, exactitud $2.5 \cdot 10^{-11}$), de potencia del orden de 100 μ W.

El láser a calibrar es un láser de He-Ne (633 nm, que estabiliza por efecto Zeeman). Este láser de potencia del orden de 700 μ W, emite en dos modos distanciados 0.8 MHz, ambos con polarización circular, y opuesta.

El láser de referencia y el láser a calibrar, se superponen sobre un divisor de haz no polarizante, como muestra la Fig.1. A la salida del divisor se tiene un detector de avalancha APD 210, con el que se registra w_{bat} . Las lecturas del detector se adquieren con un contador Stanford Research System SR232 cuya base de tiempo es referida al Patrón primario de tiempo y frecuencia (Cs Primary frequency Standard 5071A).

A la salida del láser a calibrar se colocó una lámina de cuarto de onda ($\lambda/4$), y a continuación una lámina de

media onda ($\lambda/2$) (ver Fig.1). Esta última tiene el objeto de seleccionar uno u otro modo para ser mezclado con la frecuencia del láser de referencia.

El láser de referencia estabiliza en 7 líneas de absorción del I₂. Este láser viene equipado con electrónica que permite monitorear la estabilidad de cada una de las líneas.

Las mediciones se realizaron con una temperatura de ≈ 23 °C, humedad relativa entre (35 – 45)%, durante la noche. La tensión V_{pp} de la señal de w_{bat} medida resultó de ≈ 1 V.

La duración de las mediciones fue de aproximadamente 10 horas cada una, y la adquisición de datos se realizó con ventanas de 1 y 10 segundos configuradas en el contador.

III. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Cuando se mide la frecuencia de un láser estabilizado, la incertidumbre de medición se determina a partir de la varianza de Allan⁽⁶⁾.

Si se considera una secuencia temporal de mediciones de una magnitud fluctuante como una función continua $y(t)$, o una serie de lecturas discretas y_i , la forma usual de caracterizar este conjunto de datos es a través del promedio estadístico

$$\bar{y}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (5)$$

La desviación experimental cuadrática estándar

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (6)$$

y la desviación estándar del promedio

$$\bar{S}_y = \frac{S_y}{\sqrt{N}} \quad (7)$$

Cuando las fluctuaciones son el resultado de un proceso estadístico, y este proceso es estacionario (el valor medio y la varianza son cantidades independientes del tiempo) de acuerdo con el teorema central del límite la esperanza se determina como

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy \quad (8)$$

y su varianza σ^2 como

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \langle y \rangle)^2 p(y)dy \quad (9)$$

con $p(t)$ distribución de probabilidades normal.

Sin embargo cuando existe correlación entre las cantidades fluctuantes el uso de la varianza estándar en el análisis de la dispersión de variables dependientes del tiempo puede conducir a problemas de divergencia cuando el número de mediciones tiende a infinito. Dicha divergencia puede ser originada por correlación entre mediciones que introducen ruidos no aleatorios en las distintas series medidas. El uso de la llamada varianza de Allan se ha generalizado a nivel internacional para expresar la estabilidad de osciladores ya que es convergente para los principales ruidos no blancos presentes en señales de tiempo y frecuencia⁽⁷⁾.

Dada una serie de N mediciones (o muestras) de duración τ , y tiempo T entre mediciones consecutivas, con $(T - \tau)$ el tiempo muerto entre mediciones, (ver

Fig.2⁽⁸⁾), podemos definir la varianza de N -muestras para un dado N , T y τ como

$$\sigma^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2 \quad (10)$$

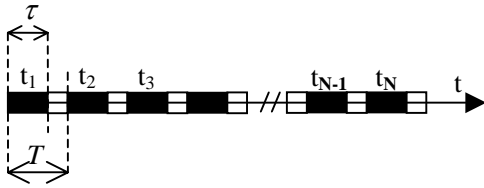


Figura 2: Definición de τ , T , y $T-\tau$

Si ahora, de acuerdo a lo propuesto por David Allan⁽⁹⁾, evaluamos para $N = 2$, con $T = \tau$, resulta

$$\sigma_y^2(2, \tau, \tau) = \sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle \quad (11)$$

La varianza de Allan y su raíz cuadrada usualmente denominada como la desviación estándar de Allan, se basan en la diferencia entre dos valores consecutivos de frecuencias en vez de basarse en diferencias de frecuencias respecto del valor medio de la frecuencia.

Experimentalmente, la desviación de Allan de un oscilador se puede determinar a partir de la diferencia de frecuencia de éste respecto de otro oscilador. Esto se puede hacer a partir de un método heterodino como el descrito en el apartado II de este trabajo.

Cuando el oscilador de referencia presenta una estabilidad superior al oscilador bajo ensayo, la varianza de Allan es una medida de la estabilidad de este último.

En este trabajo, para determinar la frecuencia resultante del batido se montó un sistema heterodino como el descrito en el apartado II. Para N mediciones de frecuencia ($y = (w_{bat})_i$) la varianza de Allan σ_y^2 se calculó como⁽¹⁰⁾

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{i+1} - y_i)^2 \quad (12)$$

donde: y_i es la i -ésima frecuencia promediada en el intervalo τ , $\tau = m\tau_0$ es el intervalo de observación, con $m = 2^n$ cálculos posibles y τ_0 la ventana de muestreo, ($\tau_0 = 1$ s, $\tau_0 = 10$ s en nuestro caso). Con el fin de obtener el mínimo retraso entre el cierre y apertura de ventanas de medición consecutivas ($T - \tau \cong 10^{-10}$ s, en Fig.3) se trabajó almacenando en forma binaria todos los datos de una medición en la memoria interna del contador, logrando de esta forma evitar demoras por procesos de conversión. Posteriormente los datos fueron adquiridos por una PC y convertidos a reales para su posterior análisis, ver Fig.3.

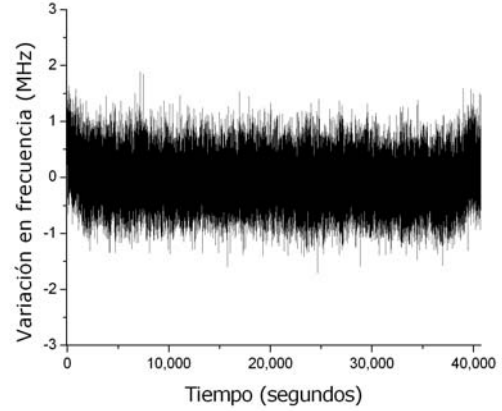


Figura 3: Variación en frecuencia de la señal de batido, en función del tiempo

Para cada serie de N mediciones de w_{bat} , la frecuencia de calibración (w_{Cal}) se calcula de la ec.(4) como,

$$w_{Cal} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w_{bat})_i \pm w_{Ref} \quad (13)$$

la frecuencia de batido promedio de las N mediciones sumándole/(restándole) la frecuencia de referencia, w_{Ref} .

Para j series de mediciones, la frecuencia resultante de calibración \bar{w}_{Cal} , es

$$\bar{w}_{Cal} = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j (w_{Cal})_k \quad (14)$$

Si llamamos $(u_C)_R$, a la incertidumbre⁽¹¹⁾ combinada relativa al mesurando \bar{w}_{Cal} , la expresión para $(u_C)_R$ a partir de las ec.(13) y (14) se tiene

$$u_{CR}^2(\bar{w}_{Cal}) = u_R^2(w_{Ref}) + u_R^2(w_{bat}) + u_R^2(w_{Rep}) \quad (15)$$

dónde $u_R(w_{Ref})$ es la incertidumbre relativa de la frecuencia de referencia⁽¹²⁾, $u_R(w_{Rep})$ la incertidumbre relativa debido a la repetibilidad del láser a calibrar, y $u_R(w_{bat})$ la incertidumbre relativa asociada a la medición de w_{bat} , resultado que depende de la resolución del contador, la estabilidad de la base de tiempo (en este caso del reloj de Cs, Patrón primario de tiempo), la ventana de muestreo, y del análisis estadístico (varianza de Allan (ec.(12))). Para simplificar la notación escribimos $(u_R(w_{bat}))^2$ como la suma de los cuadrados de la incertidumbre relativa asociada al sistema de medición, $((u_{Cont})^2$ en ec.(16)), y de la incertidumbre relativa asociada al análisis estadístico (varianza relativa de Allan, $(\sigma_y)^2$ en ec.(16)).

$$u_R^2(w_{bat}) = u_{Cont}^2 + \sigma_y^2(\tau) \quad (16)$$

$$u_R^2(w_{Rep}) = S_y^2$$

El término de incertidumbre relativo asociado a la repetibilidad del láser, $u_R(w_{Rep})$, está dado por la desviación estándar del promedio de w_{Cal} respecto del mesurando de $(w_{Cal})_k$ (ver ec.(14)). Se obtuvo $u_R(w_{Ref}) = 2.5 \cdot 10^{-11}$, $u_{Cont} = 1 \cdot 10^{-10}$ para $\tau = 1$ s, y $u_{Cont} = 1.8 \cdot 10^{-11}$ para $\tau = 10$ s, y $\sigma_y(\tau) = 8.3 \cdot 10^{-10}$, $2.9 \cdot 10^{-10}$ y $8.6 \cdot 10^{-11}$ para τ de 1 s, 10 s y 160 s respectivamente, alcanzando el valor mínimo ($5.8 \cdot 10^{-11}$) en aproximadamente 640 s, como se muestra en la Fig.4.

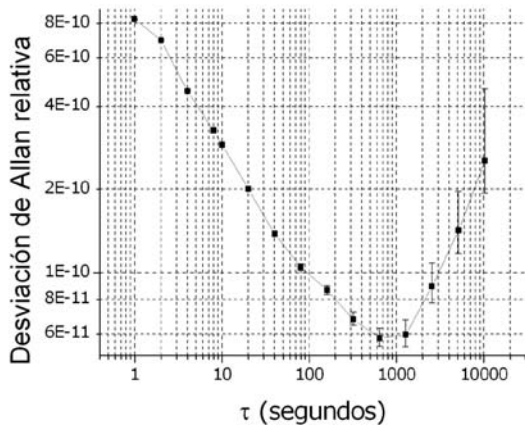


Figura 4: Desviación de Allan relativa, $(\sigma_y(\tau)/w_{cal})$ en función del tiempo de muestreo

En la tabla 1 se presentan para un mismo τ las desviaciones de Allan relativas del Patrón primario de tiempo y frecuencia, $\sigma_y(\tau_{Cs})$, del Patrón primario de longitud, $\sigma_y(\tau_{Ref})$ y del láser a calibrar, $\sigma_y(\tau)$. Como se tiene que

$$\sigma_y(\tau) > \sigma_y(\tau_{Cs}) \text{ y } \sigma_y(\tau) > \sigma_y(\tau_{Ref}) \quad \forall \tau \quad (17)$$

podemos asegurar que la desviación de Allan del láser a calibrar es una medida de la estabilidad de éste.

TABLA 1: $\sigma_y(\tau)$ ES LA DESVIACIÓN DE ALLAN RELATIVA DEL LÁSER A CALIBRAR, $\sigma_y(\tau_{Cs})$ DEL RELOJ DE CS, Y $\sigma_y(\tau_{Ref})$ DEL LÁSER DE REFERENCIA⁽¹³⁾.

$\sigma_y(\tau)$	$\sigma_y(\tau_{Cs})$	$\sigma_y(\tau_{Ref})$	τ (s)
$8.3 \cdot 10^{-10}$	$\leq 1.210 \cdot 10^{-11}$	$9.3 \cdot 10^{-13}$	1
$2.9 \cdot 10^{-10}$	$\leq 8.510 \cdot 10^{-12}$	$3.510 \cdot 10^{-13}$	10
-	-	$1.4 \cdot 10^{-13}$	100
$8.6 \cdot 10^{-11}$	$\leq 2.710 \cdot 10^{-12}$	-	160

Para $\tau = 10s$ la incertidumbre relativa de w_{Cal} , (ver ec.(15)) queda determinada esencialmente por la desviación de Allan, como se muestra en la Fig.5.

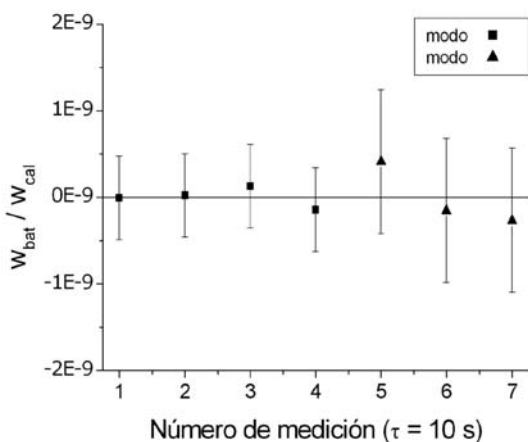


Figura 5: Resultados obtenidos para las dos frecuencias del láser incógnita.

Para determinar la repetibilidad relativa del láser se midió 4 veces w_{Cal} en uno de los modos, obteniéndose

$u_R(w_{Rep}) = 1.92 \cdot 10^{-10}$ y 3 veces en el otro modo, obteniéndose $u_R(w_{Rep}) = 5.14 \cdot 10^{-10}$. Por lo tanto para $\tau = 10s$ la incertidumbre relativa combinada $(u_C)_R$ esta determinada esencialmente por la estabilidad del láser (desviación de Allan) y su repetibilidad (desvío estándar). Siendo $(u_C)_R = 3.5 \cdot 10^{-10}$ en un caso y $(u_C)_R = 5.9 \cdot 10^{-10}$ en el otro, (ver ec.(15) y (16)).

IV. CONCLUSIONES

Con el método descrito en el presente trabajo se obtiene una incertidumbre combinada relativa del orden de $1 \cdot 10^{-10}$ mientras que con el método interferométrico, calibración en longitud de onda, la incertidumbre combinada relativa que se obtiene es del orden de $1 \cdot 10^{-8}$ (resultados que finalmente se encuentran limitados por la repetibilidad y estabilidad del láser a calibrar). Con esta mejora se pudo discriminar las frecuencias de los dos modos existentes en el láser a calibrar y realizar un estudio de la estabilidad del mismo.

El análisis de los resultados muestra que la repetibilidad relativa del láser calibrado es $1.92 \cdot 10^{-10}$ y $5.14 \cdot 10^{-10}$ cuando solo un modo (una frecuencia) es explorada. En esta condición se observa una estabilidad relativa de $8.3 \cdot 10^{-10}$ para muestreos de 1 segundo, $2.9 \cdot 10^{-10}$ para muestreos de 10 segundos y alcanza un máximo de estabilidad en aproximadamente 640 segundos con una desviación de Allan de $5.8 \cdot 10^{-11}$. Por lo tanto para $\tau > 10s$ la repetibilidad del láser, y su estabilidad, (desviación estándar de Allan) son las componentes dominantes de la incertidumbre.

En casos donde el láser calibrado sea usado como referencia de frecuencia, y a su vez no puedan discriminarse los modos de emisión debe considerarse como frecuencia de emisión el promedio entre las dos frecuencias emitidas. En este caso la repetibilidad relativa alcanza un valor de $2.4 \cdot 10^{-9}$ siendo esta la mayor fuente de incertidumbre, para todo τ .

V. AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer la colaboración en este trabajo de R. Iuzzolino, A. Toran, S. Illief, H. Laíz, y H. Schnatz del Physikalisch – Technische Bundesanstalt (PTB).

VI. BIBLIOGRAFÍA

- ¹T J Quinn, Metrologia 40 (2003) 103-133, (2001)
- ²Metrologia, Vol.19,pp, 163–178, 1984.
- ³GPS - Length standard - Gauge blocks”, ISO 3650, 2nd ed.1998-12-15.
- ⁴Jorge Álvarez, Karina Bastida - Anales AFA, VOL 18, Merlo 2006, (ISSN 1850-1158).
- ⁵Optica, Hecht Zajac, Addison Wesley
- ^{6, 8}Frequency Standards, Fritz Riehle, WILEY-VCH Verlag GmbH Co.KGaA.
- ^{7,10}Seminario de Metrología en Tiempo y Frecuencia organizado por el SIM, (Febrero de 2008, INTI), Dr. Mauricio, López, CENAM.
- ⁹ David W.Allan, Proceeding of the IEEE, Vol 54 No2, Febrary, 1996.
- ¹¹ Guía para la expresión de la incertidumbre de medición 2000, 23^{da} edición, Traducción INTI-CEFIS, del documento

Guide to Expression of Uncertainty in Measurements
(BIOM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 1993.

^{12,13} C.A.Massone, et al. Metrologia, 2002, 39, 579-585.