

# ANÁLISIS DE UN MECANISMO DE CALENTAMIENTO RADIATIVO EN ATMÓSFERAS ESTELARES

C. A. Paola y C. D. Sorrentino

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Pasco del Bosque s/n, (1900) La Plata  
amp@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

En este trabajo presentamos un mecanismo de calentamiento no magnético en atmósferas estelares basado en la captura de radiación electromagnética. El mismo constituye una aplicación del Principio Extremal de Fermat en una atmósfera cuyas propiedades físicas pueden describirse por funciones esféricamente simétricas. En primer lugar, desarrollamos un modelo simple que pone de manifiesto la existencia de regiones de captura de radiación. Luego, extendemos el análisis a la situación de interés en Astrofísica, derivando un criterio para diagnosticar la posibilidad de tal captura. Aplicando este criterio sobre un ejemplo concreto obtenemos que la radiación cautiva puede darse en la fotosfera de una estrella de temperatura efectiva de 13000 K. Finalmente, discutimos un lineamiento para evaluar la factibilidad de que este mecanismo contribuya al calentamiento anómalo en capas superiores de la atmósfera.

A non-magnetic heating mechanism in stellar atmospheres based on the electromagnetic radiation capture is shown in this paper. It is an application of the Fermat's extremal principle in an atmosphere whose symmetric physical properties can be described by spherically functions. First, it is developed a simple model that shows the radiation captures regions existence. Afterwards, the analysis is extended to an astrophysical problem, developing a criterion to detect the possibility of such capture. An application of this criterion to a concrete example is made, obtaining the captive radiation that can exist in the photosphere of a star with an effective temperature of 13000 K. Finally, it is discussed the factibility that this mechanism contributes to the anomalous heating in the upper shells of the atmosphere.

## I. INTRODUCCIÓN

Los mecanismos de calentamiento de origen magnético han proporcionado una explicación aceptable para muchas anomalías termodinámicas observadas en plasmas astrofísicos (Sweet 1958, Parker 1963, Petschek 1964, Sonnerup 1970 y 1985). Un importante ejemplo de esta clase de fenómenos lo constituye el calentamiento cromosférico y coronal en el sol y en las atmósferas de algunas estrellas (Priest 1982). En estos casos, la temperatura de las capas externas a la fotosfera exhiben un comportamiento creciente con el radio, en clara contradicción con los mecanismos de conducción térmica. En la actualidad existe un gran consenso acerca de que este calentamiento se produce a expensas de la disipación de energía magnética en hojas de corriente (Priest 1996). Sin embargo, los argumentos utilizados para descartar mecanismos radiativos admiten serios cuestionamientos dejando una puerta abierta para ensayar modelos de esta índole.

Quienes sostienen que la disipación de energía radiativa no puede dar lugar al calentamiento anómalo, argumentan que la materia alcanzará, a lo sumo, la temperatura de cuerpo negro en equilibrio con la radiación (Gibson 1973). Este razonamiento esconde la hipótesis de equilibrio termodinámico local al admitir que la radiación constituye una medida de la temperatura. En los últimos tiempos, muchos investigadores dedicados al desarrollo de modelos de atmósferas han dejado de lado la mencionada hipótesis, consiguiendo una representación mucho más ajustada de las obser-

vaciones espectroscópicas (Mihalas 1978). Por lo tanto, admitir que las atmósferas se encuentren fuera del equilibrio termodinámico local resulta compatible con los criterios actuales, a la vez que permite incluir a la radiación como agente posible del calentamiento anómalo. En esta línea de razonamiento cabe preguntarnos por ejemplo, ¿Qué alternativa tendremos para hacer una estimación de la temperatura en forma desacoplada con la radiación?, ¿Cuál es la factibilidad de que la radiación sea capturada en la atmósfera y pueda contribuir al calentamiento del medio?. Un modelo basado en la captura de radiación podría constituirse en una hipótesis que relativice la dependencia entre la termodinámica del medio y la radiación emergente. Cuando la radiación electromagnética se propaga en un medio material ópticamente delgado, ciertas peculiaridades geométricas pueden dar lugar a la captura de parte de la radiación en regiones bien definidas del sistema. Esta clase de mecanismos pueden no ser evidentes en la radiación emergente del sistema, de modo que su detección deba realizarse en forma indirecta. El principal efecto esperado en regiones de captura de radiación consiste en una alteración del estado termodinámico, en apariencia inconsistente con su entorno. En tal sentido, estos mecanismos sólo aspiran a ser una hipótesis al diagnosticar las causas de una anomalía termodinámica.

En este trabajo presentamos un modelo que pone en evidencia la factibilidad de capturar radiación en regiones definidas del espacio. Este modelo está consti-

tuido por un medio material cuyas propiedades electromagnéticas poseen simetría esférica, y su interacción con la radiación en algún rango de frecuencias puede ser descripto mediante la óptica geométrica. Combinando la simetría de las propiedades ópticas con el Principio extremal de Fermat, pueden distinguirse dos modos de propagación cualitativamente diferentes. El primer modo está relacionado con la radiación que ingresa o escapa del sistema, de manera que sólo ocasionalmente atraviesa regiones internas del mismo. El segundo es el modo cautivo, relacionado con parte de la radiación originada en el interior del sistema que es obligada por la geometría a permanecer dentro del mismo. En la sección II presentamos una versión simplificada del modelo que permitirá la comprensión de los aspectos físicos. En la sección III extendemos el análisis al caso de interés Astrofísico, en que las propiedades electromagnéticas se describen como funciones continuas de la coordenada radial. A pesar que la complejidad matemática es considerablemente mayor, este análisis no presenta más elementos físicos que los introducidos en el modelo simple de la sección II. Además, en este punto derivamos un criterio general que permite evaluar la factibilidad de existencia de radiación cautiva.

En la sección IV presentamos un ejemplo cuyas características pueden resultar de especial interés en aplicaciones Astrofísicas. Se trata de un sistema cuyo índice de refracción depende exclusivamente de la coordenada radial, con respecto a la cual presenta la forma de un escalón con sus ángulos suavizados. Esta forma funcional constituye una aproximación a la forma que debe buscarse en los sistemas reales cuando se sospecha que en ellos existe captura de radiación. Aquí derivamos la relación que deben satisfacer los parámetros de la función para que tal captura sea posible, en virtud del criterio general desarrollado en la sección III. Luego, en la sección V desarrollamos las expresiones para estimar la fracción de la radiación que queda cautiva en las regiones definidas en el ejemplo de la sección IV. Para ello es necesario introducir información relacionada con la distribución de emisores en el interior del sistema.

En la sección VI establecemos la relación entre el índice de refracción y el coeficiente de absorción a través de las relaciones de Kramers-Croning. Además discutimos la fuerte dependencia del índice de refracción con el modelo teórico de atmósfera utilizado. En la sección VII presentamos una aplicación a un modelo concreto de estrella, utilizando los modelos de atmósfera de Kurucz (1979).

## II. UN MODELO SIMPLIFICADO

Consideremos una esfera homogénea transparente de radio  $R$  y de índice de refracción  $n > 1$  relativo al medio circundante. Supongamos además que en su interior yace radiación electromagnética que responde a las leyes de la óptica geométrica, de modo que convalidamos una descripción basada en el concepto de rayo luminoso. Tanto los rayos que penetran desde el

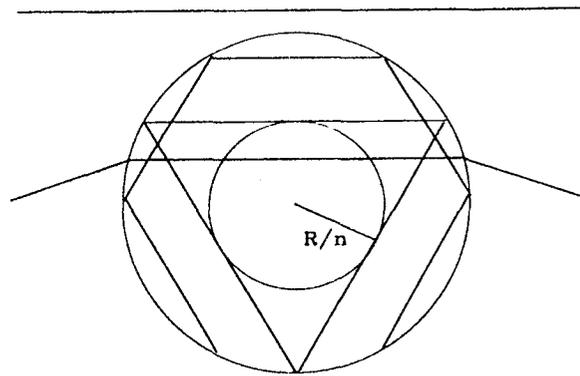


Figure 1: Esquema de los rayos del tipo A y B en una esfera con índice de refracción  $n=2$ . La circunferencia en negro indica el límite interior de la zona de captura.

medio exterior como los que se originan en el interior de la esfera se propagan a lo largo de alguna de sus "cuerdas" <sup>1</sup> (ver FIGURA 1). En cualquier caso denotamos por  $\xi$  la mínima distancia entre la cuerda que contiene al rayo y el centro de la esfera.

De la condición de reflexión total interna combinada con las propiedades de simetría de la esfera puede concluirse que sólo son posibles dos modos de propagación cualitativamente diferentes. El primero es el caso de cualquier rayo que penetra a la esfera proveniente del medio exterior o bien del caso de rayos originados en el interior de la esfera que se propagan sobre cuerdas con  $\xi < \frac{R}{n}$ . En este caso los rayos escapan de la esfera refractándose hacia el medio exterior luego de recorrer toda la cuerda. El segundo comportamiento sólo puede ser obedecido por rayos originados en el interior de la esfera, que se propagan a lo largo de cuerdas con  $\xi > \frac{R}{n}$ . Estos rayos quedan capturados en el interior de la esfera a través de múltiples reflexiones totales internas, recorriendo sucesivas cuerdas con idéntico valor de  $\xi$ . En lo sucesivo denotaremos como rayos del tipo A o B a los que siguen el primero o el segundo comportamiento respectivamente.

Consideremos ahora una fuente luminosa puntual que emite isotrópicamente y se encuentra a una distancia  $r$  del centro de la esfera. Estamos interesados en evaluar que fracción de la radiación emitida seguirá el comportamiento B. En primer lugar nótese que todos los rayos producidos por la fuente se propagan sobre cuerdas cuyos valores de  $\xi$  están superiormente acotados por  $r$ . Así podemos concluir que los rayos producidos por fuentes que se encuentran a distancias  $r < \frac{R}{n}$  son todos del tipo A, mientras que los rayos del tipo B sólo pueden ser producidos por fuentes que se

<sup>1</sup> La palabra cuerda constituye aquí un exceso terminológico debido a que representa un elemento geométrico definido para una circunferencia. Sin embargo, es posible una extensión inmediata de su significado para el caso de esferas, que resulta muy apropiada para optimizar el lenguaje.

encuentren en la región definida por:

$$\frac{R}{n} < r < R. \quad (1)$$

Supongamos ahora que la fuente se encuentra en la región definida por (1). Evaluando el ángulo sólido subtendido por los rayos de tipo B emitidos por la fuente puntual, puede concluirse que la fracción de la potencia emitida en rayos de este tipo con relación a la total emitida por la fuente puntual viene dada por

$$\frac{P_b}{P_0} = \left[ 1 - \left( \frac{R}{rn} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Esta ecuación muestra que las fuentes serán tanto más eficientes en la producción de rayos del tipo B cuanto más próximas sean a la superficie exterior de la esfera. Si asumimos que la esfera posee en su interior una distribución continua de fuentes que emiten una potencia por unidad de volumen  $p(r, \theta, \varphi)$ , la energía del campo de radiación capturada en la región (1) de la superficie por unidad de tiempo será

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R/n}^R p(r, \theta, \varphi) \left[ 1 - \left( \frac{R}{rn} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (3)$$

A modo de ejemplo consideremos una esfera que posee una distribución uniforme de fuentes  $p_0$ . La energía de la radiación capturada por unidad de tiempo puede estimarse como

$$\begin{aligned} W &= 4\pi p_0 \int_{R/n}^R r^2 \left[ 1 - \left( \frac{R}{rn} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 p_0 \left[ 1 - \left( \frac{1}{n} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Consecuentemente, la energía retenida por unidad de tiempo con relación a la potencia total emitida en la región de captura será

$$\frac{W}{W_0} = \frac{(n^2 - 1)^{3/2}}{(n^3 - 1)} \quad (5)$$

### III. EXTENSIÓN A SISTEMAS CON VARIACIÓN CONTINUA DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN

En esta sección estudiaremos la producción de rayos del tipo B en un sistema donde el índice de refracción puede representarse mediante una función regular esféricamente simétrica. Para ello asumimos simplemente que los rayos obedecen al Principio extremal de Fermat, que combinado con la simetría del sistema nos permite la determinación de las trayectorias. Sin embargo, no estamos interesados aquí en la determinación explícita de la forma funcional de las

trayectorias, si no en las condiciones que permitan establecer la existencia de rayos del tipo B y en las relaciones para estimar su tasa de producción. Nótese que ante la ausencia de fronteras el tiempo máximo de recorrido no está acotado, y en consecuencia el principio de Fermat suministrará siempre recorridos de tiempo mínimo.

En primer lugar observemos que las trayectorias están contenidas en planos que pasan por el centro de simetría. Para probarlo consideremos el plano determinado por el centro de simetría y dos puntos arbitrarios a y b no alineados con dicho centro. Orientamos un sistema de coordenadas esféricas con origen en el centro de simetría, de manera tal que el plano elegido coincida con un meridiano. Consideremos ahora una curva alabeada C, no contenida en dicho plano, que une los puntos a y b, y su correspondiente proyección C' sobre el meridiano elegido, a valores constantes de r y  $\theta$ . Evaluaremos a continuación una relación entre los tiempos que emplearía un rayo de luz en recorrer las curvas C y C'. Si denotamos por  $d\vec{l}$  un elemento de longitud de la curva C y por  $d\vec{l}'$  a su correspondiente proyección sobre C' resulta inmediato que

$$|d\vec{l}'| < |d\vec{l}|. \quad (6)$$

Dado que la proyección C' se construyó a valores constantes de r y que el índice de refracción depende sólo de la coordenada r, los tiempos involucrados en cada recorrido diferencial satisfacen la relación siguiente

$$dt' = \frac{n(r)\check{u}'}{c} \cdot d\vec{l}' < \frac{n(r)\check{u}}{c} \cdot d\vec{l} = dt, \quad (7)$$

donde  $\check{u}$  y  $\check{u}'$  son versores en las direcciones de  $d\vec{l}$  y  $d\vec{l}'$  en cada punto. Como la integración miembro a miembro preserva la desigualdad, se puede concluir que

$$T' = \frac{1}{c} \int_{C'} n(r)\check{u}' \cdot d\vec{l}' < \frac{1}{c} \int_C n(r)\check{u} \cdot d\vec{l} = T. \quad (8)$$

Así tenemos que el tiempo de recorrido de la luz a lo largo de cualquier curva alabeada será mayor que sobre su correspondiente proyección sobre un plano determinado por los extremos y el centro de simetría<sup>2</sup>. Por otra parte, dado que el principio de Fermat predice que la luz recorrerá el camino de tiempo mínimo, podemos afirmar que los rayos seleccionarán trayectorias que están contenidas sobre planos que pasan por el centro de simetría.

El tratamiento anterior nos permite encarar la descripción de las trayectorias de los rayos mediante un análisis bidimensional, para el cual elegimos un sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ <sup>3</sup>. Nuevamente resulta adecuado caracterizar los rayos mediante el

<sup>2</sup>Nótese que el tratamiento desarrollado para curvas alabeadas incluye el caso de curvas planas contenidas en planos no coincidentes con meridianos

<sup>3</sup>Para una descripción adecuada de los rayos del tipo B será necesario que la variable  $\theta$  adopte todos los valores posibles en el intervalo  $(-\infty, \infty)$

parámetro  $\xi$  de máximo acercamiento al origen, mientras que las funciones que describen las trayectorias las denotaremos por  $r_\xi(\theta)$ . Con el fin de simplificar el análisis comparativo entre las funciones  $r_\xi(\theta)$ , tomamos como ejemplo sin pérdida de generalidad, aquellas para las cuales el máximo acercamiento se da en  $\theta = 0$ . Entonces, todas estas funciones deben satisfacer que

$$r_\xi|_{\theta=0} = \xi \quad (9)$$

$$\left. \frac{dr_\xi}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0. \quad (10)$$

La principal peculiaridad que distingue a los rayos del tipo B es la existencia de un punto de máximo alejamiento del origen cuyas coordenadas denotaremos por  $(R_\xi, \Theta_\xi)$ . Por lo tanto, una evaluación de la existencia de rayos del tipo B puede basarse en el estudio de los intervalos de monotonía de las funciones  $r_\xi(\theta)$ . Para ello observamos que  $r_\xi(\theta)$  es monótonamente creciente a partir de  $\theta = 0$  y buscaremos el máximo dominio de monotonía. Teniendo en cuenta que en estos intervalos  $r_\xi(\theta)$  es invertible, el tiempo de recorrido de la luz puede estimarse como

$$T = \frac{1}{c} \int n(r) \left[ 1 + \left( r \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr. \quad (11)$$

La ecuación de Euler que caracteriza las trayectorias de tiempo mínimo será

$$r n(r) \left[ 1 + \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \xi n(\xi). \quad (12)$$

Asumiendo la regularidad de las trayectorias, los puntos extremos de los intervalos de monotonía (cuyas coordenadas denotaremos por  $r = \chi$  y  $\theta = \theta_\chi$ ) deben satisfacer que

$$\left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_\chi} = 0. \quad (13)$$

La ecuación de Euler para estos puntos toma la siguiente forma simple

$$\chi n(\chi) = \xi n(\xi). \quad (14)$$

Para simplificar el tratamiento posterior introducimos una nueva función dada por

$$s(r) = r n(r), \quad (15)$$

con lo cual la ecuación (14) puede escribirse como sigue

$$s(\chi) = s(\xi). \quad (16)$$

Esta última ecuación, además de la solución trivial  $\chi = \xi$ , puede tener varias soluciones para un mismo valor de  $\xi$ . Para evitar confusiones en la determinación de los intervalos de monotonía, utilizamos el criterio de la

derivada segunda para establecer si la solución corresponde a un punto de máximo acercamiento o máximo alejamiento del origen. De la ecuación de Euler tenemos que

$$\frac{dr}{d\theta} = r \left[ \left( \frac{s(r)}{s(\xi)} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{r^2 s(r)}{s^2(\xi)} \frac{ds}{dr}. \quad (18)$$

Reemplazando la condición de los puntos extremos en (18), tenemos que

$$\left. \frac{d^2r}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_\chi} = \frac{\chi^2}{s(\xi)} \left. \frac{ds}{dr} \right|_{r=\chi} \quad (19)$$

Esta ecuación muestra que la existencia de máximos y mínimos para las funciones  $r_\xi(\theta)$  puede establecerse a partir del signo de  $ds/dr$ . En efecto, los extremos de intervalo satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds}{dr} \right|_{r=\chi} &> 0 \rightarrow \chi \text{ pto de máx. acercamiento} \\ \left. \frac{ds}{dr} \right|_{r=\chi} &< 0 \rightarrow \chi \text{ pto de máx. alejamiento} \end{aligned} \quad (20)$$

De estas condiciones puede concluirse que la producción de rayos del tipo B queda sujeta a la existencia de intervalos en que la función  $s(r)$  sea decreciente.

#### IV. EJEMPLO: ÍNDICE DE REFRACCIÓN CON ESCALONAMIENTO SUAVE

Para fijar ideas, consideremos a modo de ejemplo que el índice de refracción puede escribirse como

$$n(r) = \begin{cases} n_0 - \left( \frac{n_0-1}{2} \right) e^{\frac{(r-R)}{\alpha}} & \text{si } r < R \\ 1 + \left( \frac{n_0-1}{2} \right) e^{-\frac{(r-R)}{\alpha}} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (21)$$

donde  $n_0$  es una constante algo mayor que la unidad mientras que  $\alpha$  es un parámetro de forma del orden del ancho de la región en la que el índice de refracción presenta cambios importantes. En la FIGURA 2 se muestra la gráfica de una función del tipo (21), mientras que en la FIGURA 3 se muestra la correspondiente función  $s(r)$  construida de acuerdo con la definición (15). Observemos en la FIGURA 3 aparece un intervalo con derivada negativa. De acuerdo con el criterio (20), en este caso tendremos rayos del tipo B.

Con el objeto de estudiar las condiciones de existencia de rayos del tipo B y los límites de la región que los contiene, escribimos explícitamente  $s(r)$  y su derivada radial:

$$s(r) = \begin{cases} n_0 r - \left( \frac{n_0-1}{2} \right) r e^{\frac{(r-R)}{\alpha}} & \text{si } r < R \\ r + \left( \frac{n_0-1}{2} \right) r e^{-\frac{(r-R)}{\alpha}} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{ds}{dr} = \begin{cases} n_0 - \left( 1 + \frac{r}{\alpha} \right) \left( \frac{n_0-1}{2} \right) e^{\frac{r-R}{\alpha}} & \text{si } r < R \\ 1 + \left( 1 - \frac{r}{\alpha} \right) \left( \frac{n_0-1}{2} \right) e^{-\frac{(r-R)}{\alpha}} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (23)$$

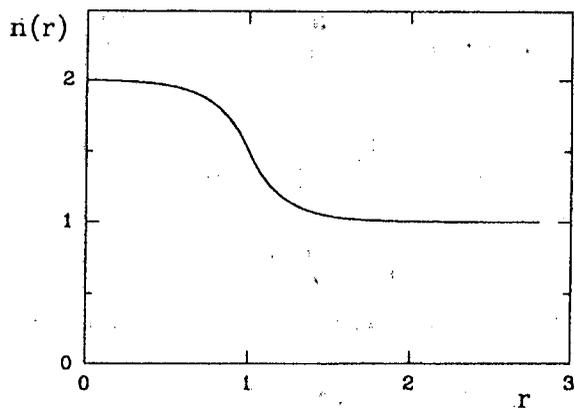


Figure 2: Gráfica del índice de refracción  $n(r)$  para el caso de escalonamiento suave,  $n_0=2$  y  $\alpha=0.2$

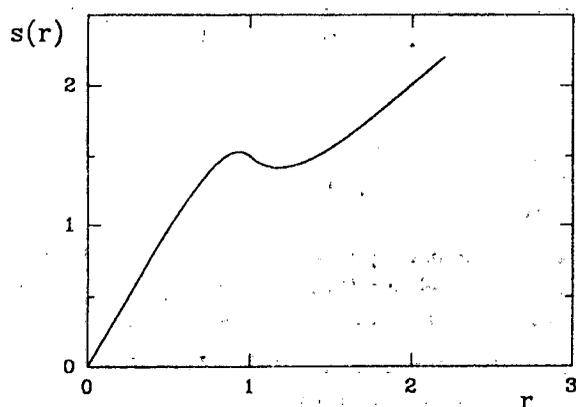


Figure 3: Gráfica de la función  $s(r)$  para el caso de escalonamiento suave,  $n_0=2$  y  $\alpha=0.2$

De acuerdo con el criterio (20), la existencia de trayectorias tipo B requiere un máximo relativo de la función  $s(r)$  en el intervalo  $(0,R)$ . Por lo tanto, una condición para el parámetro  $\alpha$  puede extraerse exigiendo la anulación de la primera rama de la función (23) en algún punto del intervalo mencionado.

$$\left. \frac{ds}{dr} \right|_{r_0=0} = 0 \quad \text{con } 0 < r_0 < R. \quad (24)$$

Puede probarse fácilmente que existe una solución de (24) si y sólo si el parámetro  $\alpha$  satisface que

$$\alpha \leq \left( \frac{n_0 - 1}{n_0 + 1} \right) R. \quad (25)$$

Según se ha dicho,  $\alpha$  es una medida del ancho de la región en la cual ocurre la máxima variación del índice de refracción, y la cota (25) pone de manifiesto que las trayectorias del tipo B sólo se darán si la región mencionada es suficientemente estrecha.

Buscaremos ahora los límites de la región en la cual los rayos del tipo B son posibles. En la FIGURA 3 se

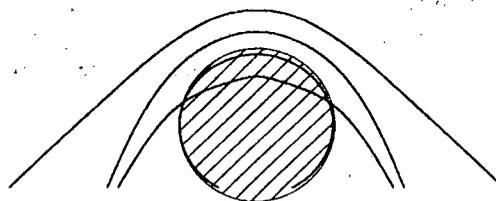


Figure 4: El esquema representa el caso de un índice de refracción con escalonamiento suave. En el mismo pueden observarse cuatro rayos con diferentes parámetros de máxima aproximación al origen. Observe que solo uno de ellos queda cautivo en la región de máxima variación de  $n(r)$ .

muestra un caso típico que admite esta clase de rayos, en el intervalo  $(r_{min}, r_{max})$ . De la figura puede deducirse que  $r_{max}$  coincide con la posición del mínimo de  $s(r)$  en el intervalo  $(R, \infty)$ . La correspondiente condición puede escribirse como

$$\left. \frac{ds}{dr} \right|_{r_{max}} = 0 \quad \text{con } r_{max} > R. \quad (26)$$

$$(27)$$

Por su parte, una vez obtenido  $r_{max}$  puede calcularse  $r_{min}$  mediante la condición

$$s(r_{min}) = s(r_{max}) \quad \text{con } 0 < r_{min} < R \quad (28)$$

Las dos últimas condiciones conducen a ecuaciones trascendentes que deben resolverse secuencialmente. En la Tabla 1 se presentan  $r_{min}$  y  $r_{max}$  relativos a  $R$ , para diversos valores de los parámetros  $\alpha$  y  $n_0$ .

## V. TASA DE PRODUCCIÓN DE RADIACIÓN CAUTIVA

Consideremos una fuente luminosa puntual que emite isotrópicamente y se encuentra en una posición comprendida en el intervalo  $[r_{min}, r_{max}]$ . Colocamos un sistema de coordenadas esféricas centrado en la fuente puntual, y orientado con su eje en la dirección que une el centro de simetría con dicha fuente. La fracción de la radiación capturada por el sistema será proporcional al ángulo sólido subtendido por la superficie de revolución formada por todos los rayos extremos<sup>4</sup> que pasen por la fuente. Utilizando la ecuación (17) e introduciendo el ángulo polar  $\beta$ , tenemos que

$$\tan \beta = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \left[ \left( \frac{s(r)}{s(r_{min})} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

<sup>4</sup>Denominamos rayos extremos a aquellos rayos cautivos que alcanzan en algún punto los radios  $r_{min}$  y/o  $r_{max}$

Tabla 1: Radios relativos interior ( $r_{min}$ ) y exterior ( $r_{max}$ ) de la región de captura, y sus diferencias ( $\Delta$ ), para diferentes valores de las constantes  $\alpha$  y  $n_0$ .

$n_0$	1.01			1.03			1.05		
$\alpha/R$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\Delta$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\Delta$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\Delta$
.0010	.9927	1.0016	.0089	.9745	1.0027	.0282	.9564	1.0032	.0468
.0020	.9942	1.0018	.0077	.9767	1.0040	.0273	.9591	1.0051	.0460
.0030	.9958	1.0015	.0057	.9785	1.0048	.0263	.9613	1.0064	.0451
.0040	.9978	1.0009	.0031	.9800	1.0053	.0253	.9632	1.0073	.0441
.0050	-----	-----	-----	.9814	1.0055	.0241	.9649	1.0081	.0432
.0060	-----	-----	-----	.9829	1.0055	.0226	.9664	1.0086	.0422
.0070	-----	-----	-----	.9844	1.0053	.0209	.9678	1.0089	.0411
.0080	-----	-----	-----	.9861	1.0050	.0189	.9692	1.0091	.0399
.0090	-----	-----	-----	.9878	1.0046	.0167	.9707	1.0092	.0385
.0100	-----	-----	-----	.9897	1.0040	.0143	.9721	1.0092	.0370
.0110	-----	-----	-----	.9917	1.0033	.0116	.9737	1.0090	.0353
.0120	-----	-----	-----	.9938	1.0026	.0088	.9753	1.0088	.0335
.0130	-----	-----	-----	.9959	1.0017	.0058	.9769	1.0084	.0315
.0140	-----	-----	-----	.9982	1.0008	.0026	.9786	1.0080	.0294
.0150	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9804	1.0076	.0272
.0160	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9822	1.0070	.0248
.0170	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9841	1.0064	.0222
.0180	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9861	1.0057	.0196
.0190	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9881	1.0049	.0168
.0200	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9902	1.0041	.0139
.0210	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9924	1.0033	.0109
.0220	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9946	1.0024	.0078
.0230	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9968	1.0014	.0046
.0240	-----	-----	-----	-----	-----	-----	.9991	1.0004	.0013
.0250	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
.0260	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$n_0$	1.07			1.09			1.11		
$\alpha/R$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\Delta$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\Delta$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\Delta$
.0010	.9388	1.0036	.0647	.9218	1.0038	.0820	.9054	1.0040	.0986
.0020	.9418	1.0057	.0639	.9250	1.0062	.0812	.9087	1.0066	.0980
.0030	.9443	1.0074	.0631	.9277	1.0081	.0805	.9115	1.0087	.0973
.0040	.9465	1.0087	.0622	.9300	1.0097	.0797	.9140	1.0105	.0965
.0050	.9484	1.0098	.0614	.9321	1.0110	.0789	.9163	1.0120	.0958
.0060	.9501	1.0106	.0605	.9341	1.0121	.0780	.9184	1.0133	.0950
.0070	.9518	1.0113	.0595	.9359	1.0131	.0772	.9203	1.0145	.0942
.0080	.9533	1.0118	.0586	.9376	1.0139	.0763	.9221	1.0155	.0934
.0090	.9547	1.0123	.0575	.9391	1.0145	.0754	.9238	1.0164	.0925
.0100	.9561	1.0126	.0564	.9406	1.0151	.0744	.9254	1.0171	.0917
.0110	.9575	1.0128	.0552	.9421	1.0155	.0734	.9270	1.0178	.0908
.0120	.9590	1.0129	.0539	.9435	1.0159	.0724	.9285	1.0183	.0899
.0130	.9604	1.0129	.0525	.9449	1.0162	.0713	.9299	1.0188	.0889
.0140	.9619	1.0128	.0509	.9463	1.0164	.0701	.9314	1.0192	.0879
.0150	.9634	1.0127	.0493	.9477	1.0165	.0688	.9328	1.0196	.0868
.0160	.9650	1.0125	.0475	.9492	1.0166	.0674	.9342	1.0198	.0857
.0170	.9666	1.0122	.0456	.9506	1.0165	.0659	.9355	1.0200	.0845
.0180	.9682	1.0119	.0437	.9521	1.0165	.0644	.9370	1.0201	.0832
.0190	.9699	1.0115	.0416	.9536	1.0163	.0627	.9384	1.0202	.0818
.0200	.9716	1.0110	.0394	.9551	1.0161	.0610	.9398	1.0202	.0804
.0210	.9734	1.0105	.0371	.9567	1.0159	.0592	.9413	1.0202	.0789
.0220	.9753	1.0099	.0347	.9583	1.0156	.0573	.9427	1.0201	.0774
.0230	.9771	1.0093	.0322	.9600	1.0153	.0553	.9442	1.0200	.0757
.0240	.9791	1.0087	.0296	.9617	1.0149	.0532	.9458	1.0198	.0740
.0250	.9810	1.0080	.0270	.9634	1.0144	.0511	.9473	1.0196	.0722
.0260	.9830	1.0072	.0242	.9651	1.0139	.0488	.9489	1.0193	.0704

Entonces la fracción relativa a la potencia total emitida por la fuente viene dada por,

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \cos \theta' d\theta' = \left[ 1 - \left( \frac{s(r_{min})}{s(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

Estimemos ahora la potencia retenida en toda la región de captura. Suponiendo que  $p(r, \theta, \varphi)$  es la densidad de potencia emitida isotrópicamente por unidad de volumen en cada punto del sistema, la energía capturada por unidad de tiempo viene dada por

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} p(r, \theta, \varphi) \left[ 1 - \left( \frac{s(r_{min})}{s(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (31)$$

En el caso particular en que todos los puntos del sistema resultan emisores idénticos, la ecuación anterior se reduce a

$$W = 4\pi p_0 \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^2 \left[ 1 - \left( \frac{s(r_{min})}{s(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr \quad (32)$$

y la fracción de la potencia emitida en la región de captura que permanece en dicha región puede estimarse como

$$\frac{W}{W_0} = \frac{3}{(r_{max}^3 - r_{min}^3)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^2 \left[ 1 - \left( \frac{s(r_{min})}{s(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr \quad (33)$$

Como ejemplo aplicaremos este resultado para un índice de refracción del tipo (21). En la Tabla 2 se muestran los resultados (33) para diferentes valores de  $n_0$  y  $\alpha$ .

## VI. ÍNDICES DE REFRACCIÓN Y COEFICIENTES DE ABSORCIÓN

El índice de refracción ha sido tratado hasta este punto como una función de la posición, y por simplicidad se ha omitido su dependencia con la frecuencia. En realidad, ha sido posible omitir tal dependencia debido a que el problema puede resolverse independientemente para cada frecuencia. Luego, el modelo completo puede construirse por simple superposición. Sin embargo, el índice de refracción no suele ser una magnitud disponible, ni de las observaciones ni de los modelos de atmósferas. La magnitud asociada más usual en astrofísica es el coeficiente de absorción. El mismo se ajusta contrastando los modelos con la información espectroscópica.

El índice de refracción y el coeficiente de absorción están vinculados a través de las relaciones de Kramers-Kronig. Si se admite que el índice de refracción puede tomar valores complejos, su parte real representa el índice de refracción habitual, mientras que su parte imaginaria da cuenta de las propiedades de absorción.

Tabla 2: Potencia en función del índice de refracción y del parámetro  $\alpha$

$n_0$	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	2.00
.0010	.0662	.1402	.1885	.2268	.2591	.2874
.0020	.0469	.1259	.1755	.2145	.2472	.2759
.0030	.0297	.1134	.1644	.2040	.2372	.2661
.0040	.0141	.1017	.1543	.1945	.2281	.2573
.0050	—	.0906	.1447	.1858	.2197	.2492
.0060	—	.0799	.1356	.1774	.2119	.2416
.0070	—	.0696	.1267	.1694	.2043	.2344
.0080	—	.0597	.1181	.1616	.1970	.2274
.0090	—	.0501	.1096	.1540	.1900	.2207
.0100	—	.0409	.1014	.1465	.1830	.2141
.0110	—	.0319	.0934	.1392	.1762	.2077
.0120	—	.0232	.0856	.1320	.1696	.2014
.0130	—	.0146	.0779	.1250	.1630	.1952
.0140	—	.0064	.0704	.1181	.1566	.1891
.0150	—	—	.0631	.1113	.1502	.1832
.0160	—	—	.0559	.1046	.1440	.1772
.0170	—	—	.0488	.0980	.1378	.1714
.0180	—	—	.0419	.0916	.1318	.1657
.0190	—	—	.0350	.0852	.1258	.1600
.0200	—	—	.0283	.0790	.1198	.1544
.0210	—	—	.0217	.0728	.1140	.1488
.0220	—	—	.0152	.0667	.1083	.1433
.0230	—	—	.0088	.0607	.1026	.1379
.0240	—	—	.0025	.0548	.0970	.1326
.0250	—	—	—	.0489	.0914	.1273
.0260	—	—	—	.0431	.0859	.1220
.0270	—	—	—	.0374	.0805	.1169
.0280	—	—	—	.0318	.0751	.1117
.0290	—	—	—	.0262	.0698	.1067
.0300	—	—	—	.0206	.0646	.1016
.0310	—	—	—	.0152	.0594	.0966
.0320	—	—	—	.0097	.0542	.0917

Representando por  $\tilde{n}$  a la mencionada función compleja, la relación de Kramers-Kronig que nos interesa viene dada por:

$$n = R[n(\omega)] = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \text{Im}[n(\omega')]}{(\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' \quad (34)$$

Nótese que estas relaciones vinculan el índice de refracción para una frecuencia con el coeficiente de absorción en todas las frecuencias. En este punto resulta muy importante, reconocer que el diagnóstico sobre la existencia de regiones de captura de radiación depende fuertemente del modelo de atmósfera. En efecto, la confiabilidad del índice de refracción calculado mediante las relaciones de Kramers-Kronig, quedará condicionada por la validez de las hipótesis del modelo de atmósfera en un rango muy amplio de frecuencias.

Supongamos ahora que el modelo es confiable. Cada vez que la función  $n(r, \omega)$  presente un punto de inflexión con derivada mínima en su dependencia con

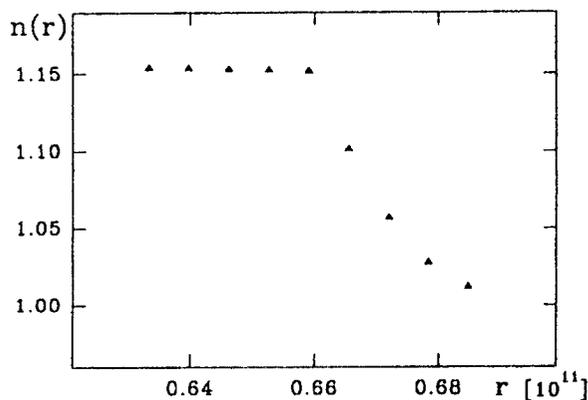


Figure 5: En el gráfico se muestran los puntos calculados para la frecuencia  $10^{11} Hz$

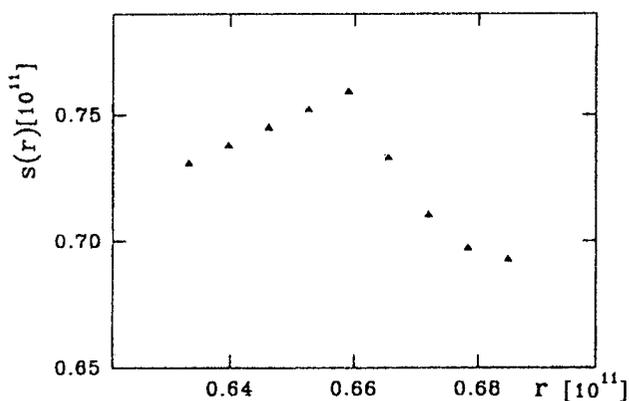


Figure 6: En el gráfico se muestran los puntos calculados para la frecuencia  $10^{11} Hz$

$r$ , la misma puede ajustarse localmente mediante una función del tipo (21). El criterio (25) permite decidir en cada caso si la captura de radiación es posible. Cuando esta ocurre, las relaciones (26) y (28) determinan la localización exacta de cada región.

## VII. APLICACIÓN

En esta sección analizamos a modo de ejemplo la posibilidad de existencia de zonas de captura de radiación. Para ello elegimos el modelo de atmósfera propuesto por Kurucz (1979), que describe una fotosfera en equilibrio hidrostático y radiativo. Este modelo nos permite relacionar las propiedades termodinámicas y electromagnéticas. La elección de un modelo de fotosfera como ejemplo de aplicación se debe a que dichas regiones son muy estrechas y presentan grandes variaciones en las propiedades como función de la coordenada radial. Justamente, zonas esféricamente simétricas de éstas características deben ser tenidas en cuenta como criterio básico en la búsqueda de posibles regiones de captura.

Para desarrollar el ejemplo, hemos elegido una estrella cuya temperatura efectiva es 13000 K. El mo-

delo de Kurucz nos proporciona la temperatura y la densidad como funciones de la coordenada radial en la región fotosférica. Luego, calculamos el coeficiente de absorción relacionado con la emisión del continuo, como función de la frecuencia y la coordenada radial. En este cálculo, hemos tenido en cuenta las contribuciones de los siguientes procesos: transiciones libre-libre y ligado-libre en HI, transiciones libre-libre y ligado-libre en  $H^-$ , dispersión Rayleigh y dispersión electrónica (Kurucz 1970). Con estos coeficientes de absorción y las relaciones de Kramer-Kronig, hemos calculado numéricamente los índices de refracción para los radios de la región fotosférica y una amplia gama de frecuencias, incluyendo desde las ondas de radio hasta el ultravioleta.

## VIII. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Una vez obtenidos los índices de refracción, hemos aplicado el criterio (20) para determinar si la captura de radiación es posible en las diferentes bandas. Con este análisis encontramos que tal captura puede ocurrir para frecuencias menores que  $1.5 \times 10^{11} Hz$ . Además encontramos que las condiciones son tanto más favorables cuando menor es la frecuencia. En las figuras 5 y 6 mostramos los valores calculados con frecuencia  $10 \times 10^{11} Hz$  a partir del modelo de Kurucz para el índice de refracción  $n(r)$  y la correspondiente función  $s(r)$ . En la gráfica de  $s(r)$  puede observarse un intervalo donde  $ds/dr$  es negativa, de donde se deduce inmediatamente que la radiación de  $10 \times 10^{11} Hz$  puede ser capturada. Para que la captura ocurra efectivamente, es necesario que en la región existan emisores de la frecuencia mencionada. La emisión puede ser de origen térmico o bien consecuencia de la dispersión de la radiación proveniente del interior de la estrella. La distribución de emisores debe establecerse en función de las probabilidades que se asignen a cada uno de estos mecanismos. Finalmente, podemos determinar la fracción de la potencia capturada mediante la integral (33). Obsérvese que por pequeña que sea esta fracción, el carácter acumulativo del fenómeno en tiempos de escala Astrofísica puede dar lugar a la formación de grandes reservorios energéticos.

Para establecer la influencia del mecanismo de captura en los procesos de calentamiento observados, nosotros proponemos que se analice si existe coincidencia entre las regiones en donde dichos procesos tienen lugar. Si ocurriera tal coincidencia, resultaría muy interesante establecer un balance energético detallado que permita determinar el estado termodinámico real independientemente del proceso radiativo. En el ejemplo que presentamos la región de captura de radiación se desarrolla en el límite entre la fotosfera y la cromosfera. Por su parte, la región de calentamiento anómalo se inicia en dicho límite y se desarrolla en una región muy extensa que incluye la cromosfera y la corona. Si bien no se da una coincidencia exacta entre las regiones de captura y calentamiento, existe un solapamiento parcial en el cual el mecanismo podría tener influencia.

## Referencias

- 1 - Gibson, E., 1973, "The Quiet Sun", NASA SP-303, Washington.
- 2 - Kurucz, R. L. 1970, Atlas SAO, Special Report, 309.
- 3 - Kurucz, R. L. 1979, Astrophysical Journal Suppl., 40, 1.
- 4 - Mihalas, D., 1978, "Stellar Atmospheres", 2da. edición, San Fransisco: W. H. Freeman & Co.
- 5 - Parker, E. N., 1958, Astrophys. J. 128, 664.
- 6 - Parker, E. N. 1963, Astrophys. J. 138, 552.
- 7 - Petschek, H. E., 1964, Symp. on Phys. of Solar Flares NASA SP-50, 425, 439.
- 8 - Priest, E. R., 1982, Solar Magnetohydrodynamic, Reidel Publ. Company: London.
- 9 - Priest, E. R., "Magnetic Reconnection on the Sun" in Basic Plasma Processes on the Sun, E. R. Priest and V. Krishan (eds), 1990, IAU, 271, 291.
- 10 - Priest, E. R. 1996, Astrophysics and Space, 237, 2.
- 11 - Sonnerup, B. U. O., 1970, J. Plasma Phys. 4, 161.
- 12 - Sonnerup, B. U. O., 1985, IAU Symposium 107.
- 13 - Sweet, P. A., 1958, IAU Symp. 6, 123.