

DIFUSIÓN DE LA VORTICIDAD DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO: UN EJEMPLO SIMPLE DE DIFUSIÓN NO LINEAL

DINO FILIPUSSI, JULIO GRATTON y FERNANDO MINOTTI

INSTITUTO DE FÍSICA DEL PLASMA (INFIP-La) - CONICET,
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA,
1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.

e-mail: jgratton@infip.lfp.uba.ar

Muchos fenómenos se describen mediante la ecuación de los medios porosos, que en una dimensión tiene la forma (1) $h_t = (h^m h_x)_x$ ($h \equiv h(x,t) \geq 0$, $m > 0$). Entre ellos: flujos en acuíferos no confinados ($m=1$), flujo de gases en medios porosos ($m=\gamma \geq 1$), conducción térmica en plasmas ($m=5/2$), corrientes viscogravitatorias ($m=3$), etc.. La no linealidad introduce importantes diferencias respecto de la difusión lineal, entre ellas la aparición de frentes. A pesar de su importancia, los procesos de difusión no lineal no se suelen enseñar en los estudios de grado. En vista de ello puede resultar útil disponer de ejemplos sencillos e intuitivos que se puedan presentar a los estudiantes. El caso que aquí tratamos es el de la difusión de la vorticidad de un fluido no Newtoniano, con reología de ley de potencias. Se muestra que la vorticidad satisface la ecuación (1), y se resuelve el problema de un fluido semiinfinito, limitado por una pared plana que en $t=0$ se pone en movimiento con una velocidad constante y paralela a la pared. La solución exacta es conocida y tiene forma cerrada, para cualquier valor del índice reológico. En el caso de un fluido dilatante se muestra que la vorticidad no difunde instantáneamente, a diferencia del caso Newtoniano. Problemas semejantes al planteado se pueden estudiar en el laboratorio mediante experimentos relativamente simples.

Many phenomena are described by the porous medium equation, whose one-dimensional version is (1) $h_t = (h^m h_x)_x$ ($h \equiv h(x,t) \geq 0$, $m > 0$). Among them, flow in unconfined aquiferous ($m=1$), gas flow in porous media ($m=\gamma \geq 1$), thermal conduction in plasmas ($m=5/2$), viscous gravity currents ($m=3$), etc.. Non-linearity introduces important differences when compared with linear diffusion, among them the existence of fronts. In spite of its importance, non-linear diffusion processes are not usually taught in undergraduate courses. Regarding this it can be useful to have simple intuitive examples that can be shown to the students. The case we treat here is vorticity diffusion in a non-Newtonian fluid with power-law rheology. It is shown that vorticity satisfies equation (1), the problem we solve is that of a semiinfinite fluid, limited by a plane wall that starts moving at $t=0$ with constant velocity parallel to the wall. The exact solution is known and has a closed expression for any value of the rheological index. In the case of a shear-thickening fluid it is shown that the vorticity doesn't diffuse instantaneously, as opposed to the Newtonian case. Similar problems can be studied in the laboratory by means of simple experiments

INTRODUCCIÓN

Sea una placa rígida infinita que limita un fluido incompresible semiinfinito, en reposo en el instante inicial. La reología del fluido se supone del tipo de ley de potencias¹, de manera que el tensor de esfuerzos está dado por:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_n \left(\sum_{kl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{lk} \right)^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Aquí $\varepsilon_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$ es el doble del tensor velocidad de deformación, u el campo de velocidades, p la presión y μ_n una constante con dimensiones. Si x, y son las coordenadas paralela y perpendicular a la placa y $U = u_x$ ($u_y = 0$), la ecuación de movimiento será:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu_n \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^n, \quad (2)$$

donde $\nu_n \equiv \mu_n / \rho$ y ρ es la densidad del fluido.

Usando las condiciones de contorno:

$$U(0,t) = U_0, U(\infty,t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3)$$

y derivando (2) respecto de y , resulta la ecuación para la vorticidad $\omega = \partial U / \partial y$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu_n \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \quad (4)$$

La (4) es una ecuación no lineal de difusión, que se suele llamar² "ecuación de los medios porosos", y tiene gran interés porque además del caso que estamos considerando, describe una variedad de fenómenos, como flujos en acuíferos no confinados ($n=2$), flujo de gases en medios porosos ($n=\gamma+1 \geq 2$), conducción térmica en plasmas ($n=7/2$), corrientes viscogravitatorias ($n=4$), etc.. A pesar de su importancia, los procesos de difusión no lineal no se suelen enseñar en los estudios de grado. El problema que tratamos aquí, por su sencillez, puede servir como introducción al tema. Veremos que la no linealidad introduce importantes diferencias res-

pecto de la difusión lineal, entre ellas la aparición de frentes, como se verá en lo que sigue.

AUTOSEMEJANZAS

Las soluciones autosemejantes³ de (4) se obtienen considerando el grupo de transformaciones

$$y=C^{\alpha_1}\bar{y}, t=C^{\alpha_2}\bar{t}, \omega=C^{\alpha_3}\bar{\omega}, \quad (5)$$

que deja invariante la (4) si se cumple

$$2\alpha_1-\alpha_2=(n-1)\alpha_3. \quad (6)$$

Tomando la solución $\alpha_1=1$, $\alpha_2=n+1$ y $\alpha_3=-1$, los invariantes absolutos se obtienen de eliminar la constante C de las (5) y resultan ser:

$$\eta \propto \frac{y^2}{t^{2/(n+1)}}, f \propto \omega t^{1/(n+1)}. \quad (7)$$

La dependencia funcional de ω es entonces

$$\omega(y,t)=At^{-1/(n+1)} f(By^2t^{-2/(n+1)}), \quad (8)$$

donde A y B son constantes a determinar por las condiciones de contorno.

Sustituyendo la (8) en la (4) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para $f(\eta)$:

$$2\eta(f^{n-1}f'+f)' + f^{n-1}f'+f=0 \quad (9)$$

en la cual se impuso la relación de escala

$$2n(n+1)v_nA^{n-1}B=1. \quad (10)$$

FLUIDO NEWTONIANO

El caso Newtoniano se trata en muchos textos y lo resumimos brevemente. Con $n=1$ resulta

$$2\eta(f'+f)' + (f'+f)=0, \quad (11)$$

cuya solución $f'+f=0$ corresponde por (8) a

$$\omega(y,t)=\frac{A}{\sqrt{t}}e^{-By^2/t}. \quad (12)$$

La constante B se obtiene de la (10):

$$B=\frac{1}{4v}. \quad (13)$$

De la definición de ω y de las (3) obtenemos A:

$$U_0=-\int_{U(0)}^{U(\infty)} dU=\int_0^\infty \omega dy=At^{-1/2}\int_0^\infty e^{-y^2/(4vt)} dy=A\sqrt{\pi v}, \quad (14)$$

con lo que resulta finalmente

$$\omega(y,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi vt}}e^{-y^2/(4vt)}. \quad (15)$$

CASO NO NEWTONIANO

La primera integral más sencilla de la (9) es $f^{n-1}f'+f=0$, o sea $f^{n-2}f'+1=0$ (pues $f \neq 0$). Si $n \neq 1$ resulta $(f^{n-1})'=1-n$ cuya integral es

$$f(\eta)=[1+(1-n)\eta]^{1/(n-1)}, \quad (16)$$

de donde resulta para la vorticidad

$$\omega(y,t)=At^{-1/(n+1)}\left[1+\frac{(1-n)By^2}{t^{2/(n+1)}}\right]^{-1/(1-n)}. \quad (17)$$

Para un fluido pseudoplástico ($n < 1$) ponemos

$$\xi^2 \equiv (1-n)By^2t^{-2/(n+1)}, \quad (18)$$

luego $\xi \rightarrow 0$ (∞) si $y \rightarrow 0$ (∞), y usando (3):

$$U_0=-\int_{U(0)}^{U(\infty)} dU=\int_0^\infty \omega(\xi)\frac{dy}{d\xi}d\xi= \frac{A}{2\sqrt{(1-n)B}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/(1-n)-1/2)}{\Gamma(1/(1-n))}, \quad (19)$$

que, junto a (10) determinan A y B , y resulta

$$\omega(y,t)=\frac{\frac{\alpha_n(U_0^2)}{Y_0(v_n t)}}{\left[1+\frac{y^2}{(v_n U_0 t)^{2/(n+1)}Y_0^2}\right]^{1/(1-n)}}, \quad (20)$$

donde se han definido

$$\alpha_n \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/(1-n))}{\Gamma(1/(1-n)-1/2)}, \quad (21.a)$$

$$Y_0 \equiv \left[\frac{2n(n+1)}{(1-n)\alpha_n^{1-n}}\right]^{1/(n+1)}. \quad (21.b)$$

Para un fluido dilatante ($n > 1$) definimos

$$\xi^2 = \frac{(n-1)By^2}{t^{2/(n+1)}} \equiv (y/y_f)^2, \quad (22)$$

que cumple $\xi \rightarrow 0$ si $y \rightarrow 0$ y $\xi \rightarrow 1$ si $y \rightarrow y_f$, con lo que usando (3) obtenemos

$$U_0 = \frac{A}{2\sqrt{(n-1)B}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n/(n-1))}{\Gamma(n/(n-1)+1/2)}, \quad (23)$$

que, junto a (10), determinan A y B y resulta

$$\omega(y,t)=\frac{\beta_n(U_0^2)}{Y_f(v_n t)} \times \left[1-\frac{y^2}{(v_n U_0^{n-1} t)^{2/(n+1)}Y_f^2}\right]^{1/(n-1)}, \quad (24)$$

donde se han definido

$$\beta_n \equiv \frac{2 \Gamma(n/(n-1)+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/(n-1))}, \quad (25.a)$$

$$Y_f \equiv \left[\frac{2n(n+1)}{(n-1)} \beta_n^{n-1} \right]^{1/(n+1)} \quad (25.b)$$

COMPARACIÓN DE SOLUCIONES

La comparación de las distintas soluciones se simplifica si se las normaliza apropiadamente. Para el caso Newtoniano tomamos

$$W = W_0 e^{-Y^2/4}, \quad (26)$$

donde se han definido

$$W \equiv \frac{\omega \sqrt{v_n t}}{U_0}, W_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}, Y \equiv \frac{y}{\sqrt{v_n t}} \quad (27)$$

Para el caso pseudoplástico ($n < 1$) es

$$W = \frac{W_0}{(1+Y^2/Y_0^2)^{1/(1-n)}}, \quad (28)$$

con

$$W \equiv \frac{\omega}{(U_0^2/v_n t)^{1/(n+1)}}, W_0 \equiv \frac{\alpha_n}{Y_0}, \quad (29)$$

$$Y \equiv \frac{y}{(v_n U_0^{n-1} t)^{1/(n+1)}}$$

Finalmente, para un fluido dilatante ($n > 1$) es

$$W = W_0 (1 - Y^2/Y_f^2)^{1/(n-1)}, \quad (30)$$

donde valen las (29) redefiniendo

$$W_0 \equiv \frac{\beta_n}{Y_f} \quad (31)$$

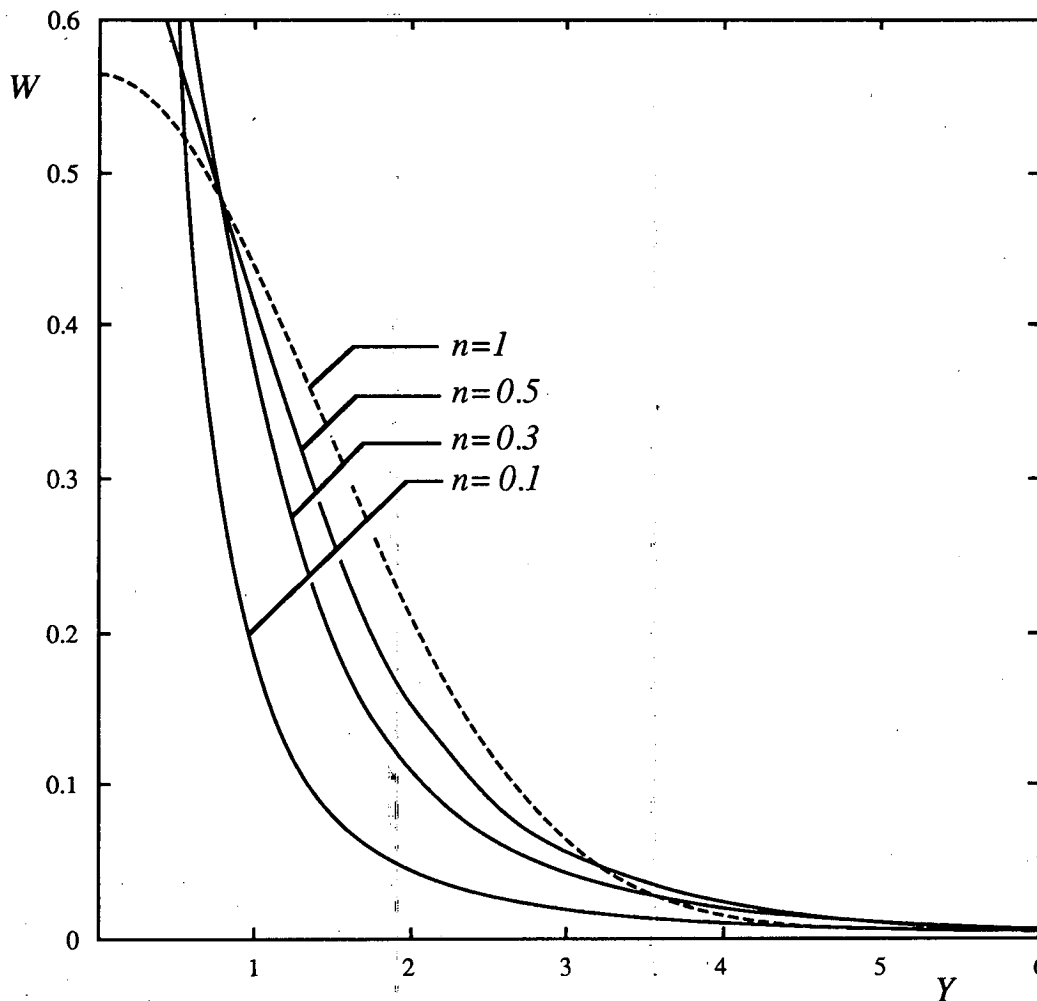


Figura 1: Vorticidad en función de la distancia a la pared en movimiento, para tres fluidos pseudoplásticos, comparada con un fluido newtoniano. Se observa que el decrecimiento de la vorticidad es asintótico al eje Y.

De la (30) se ve la existencia de un frente en $Y=Y_f$, más allá del cual la vorticidad es nula. En términos de las variables primitivas, la posición del frente es

$$y_f(t) = Y_f U_0 (v_n t)^{1/(n-1)} \quad (32)$$

En las figuras 1 y 2 se muestran perfiles de vorticidad en las variables normalizadas para

fluidos pseudoplásticos y dilatantes y se comparan con la solución Newtoniana.

Es interesante observar que cuando $n > 2$ la vorticidad cae con pendiente vertical al llegar al frente, mientras que cuando $1 < n < 2$ tiende suavemente a cero.

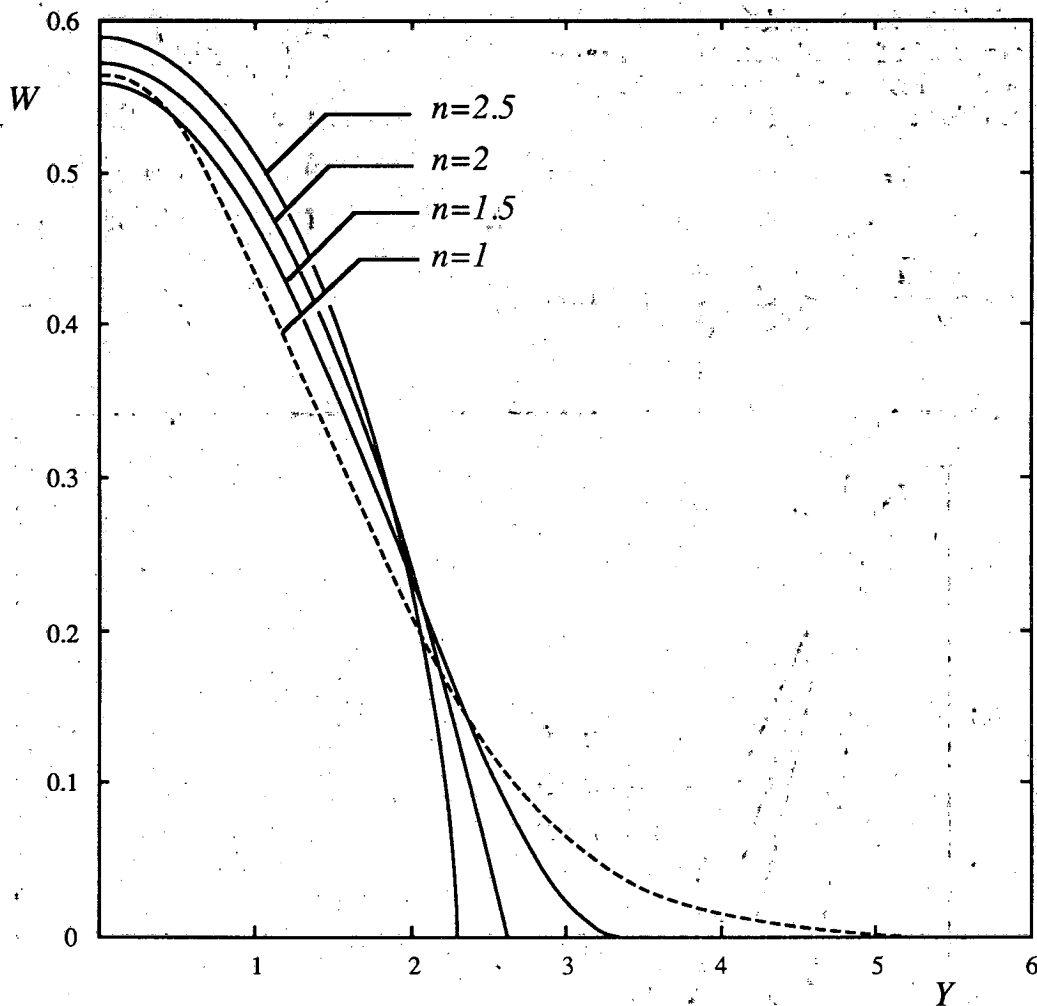


Figura 2. Vorticidad en función de la distancia a la pared en movimiento, para tres fluidos dilatantes, comparada con un fluido newtoniano. Se observa que la vorticidad decrece hasta un valor nulo, indicando la presencia de un frente.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado la solución de un problema atacable analíticamente en forma relativamente sencilla y que permite ilustrar la difusión no lineal. En particular, se encuentra que cuando $n > 1$ el fenómeno difusivo presenta un frente definido, contradiciendo la intuición corriente.

Se agradece apoyo del CONICET y de la Universidad de Buenos Aires (Proy. Ex 245).

REFERENCIAS

1. Barnes, H. A., Hutton, J. F. y Walters, K., *An Introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
2. Peletier, L. A., *Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences, Cap. 11, The Porous Media Equation*, Pitman Adv. Pub. Prog., Boston 229-240, 1981.
3. Sedov, L. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press, New York, 1959.