Soluciones Exactas provenientes de Datos en el Infinito Nulo.

A. PÉREZ* y O.M. MORESCHI

FAMAF
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
(5000) CÓRDOBA - ARGENTINA
e-mail: aperez@fis.uncor.edu

En este artículo comunicamos el resultado de integrar las ecuaciones de campo, en forma exacta, para datos dados en el infinito nulo futuro correspondiente a sistemas simples en gravedad linearizada. Esto provee de un método para la interpretación física de soluciones exactas en término de conceptos inambiguos de la relatividad especial. Trabajamos en el formalismo de GHP de tetradas nulas, en donde presentamos las ecuaciones que relacionan los coeficientes de espín y las componentes de una tetrada general adaptada a una congruencia de curvas nulas. En el marco de espacio-tiempos asintóticamente planos introducimos el concepto de tetrada rotante, asociada al momento angular, que muestra ser de utilidad en la integración de soluciones con momento angular.

In this article we communicate the result of the integration of the field equation for data given at future null infinity; corresponding to simple systems in linearized gravity. In this way, a method for the physical interpretation of exact solutions, in terms of unambiguous concepts coming form special relativity, is given. We use for the calculations the GHP formalism of null tetrads, and present the equations that relate the spin coefficients and the null tetrad components associated to a general congruence of null curves. We introduce the concept of rotating null tetrad for asymptotically flat spacetimes with angular momentum; which are useful in the integration of spacetimes with angular momentum.

1 Introducción

La no linealidad de las ecuaciones de campo de la relatividad general trae aparejado, la dificultad técnica para resolverlas. A esto se debe agregar que por ser ésta una teoría que involucra la estructura del mismo espacio-tiempo no es posible pensar en una dada arena independiente de los campos existentes, como en otras áreas de la física, donde el espacio-tiempo está dado y sobre el cual se basa todo análisis. Esto implica que nuestra intuición, basada en la física Minkowskiana, tenga ciertas dificultades a la hora de dar una interpretación de las soluciones.

Existen muchas soluciones de las ecuaciones de Einstein pero pocas a las cuales sea posible atribuirles una interpretación física concreta.

En gravedad linearizada es posible definir sin ambigüedades los conceptos físicos, cuya aplicabilidad se intenta extender a la teoría completa.

La noción de sistema aislado, que en relatividad general se modela con espacio-tiempos asintóticamente planos, es una herramienta importante para el estudio de muchos problemas, que nos permite considerar ciertos sistemas como separados del resto del universo. En este caso es posible definir cantidades con interpretaciones concretas como masa, momento total y momento angular (es de notar que la definición de momento angular es canónica sólo en el caso de espacio-tiempos estacionarios[1]).

Como primer paso en el camino de obtener una descripción física de las soluciones exactas trataremos en este trabajo con espacio-tiempos estacionarios y asintóticamente planos.

En esencia, usando tetradas nulas, definidas geométricamente, nos proponemos dar datos en el infinito nulo futuro, para espacios estacionarios, y luego proceder a la integración radial hacia el interior. Estos datos asintóticos serán motivados por el estudio de soluciones linearizadas de las ecuaciones de campo y constituirán la base de nuestra interpretación de las soluciones exactas.

En la sección (2) presentamos las tetradas nulas sobre las cuales basamos nuestros cálculos, en particular el concepto de tetrada estándar[2] adaptada a espacio-tiempos asintóticamente planos y damos la definición de tetrada rotante. A lo largo de todo este trabajo trataremos las ecuaciones de Einstein en el formalismo de GHP[3] adaptado a estas tetradas nulas.

En la sección (3) se analiza, el comportamiento del tensor de Weyl en gravedad lineal, se resuelven las identidades de Bianchi linearizadas para un espacio-tiempo vacío estacionario y asintóticamente plano. Se obtiene entonces el desarrollo multipolar de Weyl linearizado que sugiere la forma de las condiciones

* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia

asintóticas exigidas en los cálculos de soluciones exactas.

En la sección (4) presentamos el primer ejemplo en donde, a partir de condiciones asintóticas provenientes de los resultados de la sección anterior, calculamos los espacio-tiempos monopolares obteniéndose de esta forma la célebre solución exacta de Schwarzschild.

Con el mismo espíritu, en la sección (5), partiendo de las condiciones asintóticas que definen un espacio-tiempo monopolar con momento angular en gravedad linearizada, buscamos la correspondiente solución exacta de la ecuación de vacío. En este caso se encuentra que es físicamente más relevante la definición basada en la tetrada rotante; a partir de la cual encontramos como solución a la familia de métricas de Kerr-NUT[4].

Finalmente, en el apéndice, presentamos las ecuaciones que relacionan los coeficientes de espín y las componentes de una tetrada general adaptada a una congruencia de curvas nulas que generalizan las correspondientes a cada una de las tetradas utilizadas en este trabajo.

2 Descripción de tetradas

Como hemos mencionado nuestro trabajo está relacionado con la noción de espacio-tiempos asintóticamente planos en el infinito nulo futuro, como están definidos en la referencia (2). La suposición global de que $\mathscr{I}^+$ posee la topología de $S^2 \times I\!R$ hace posible introducir un sistema de coordenadas adaptado a estas características de scri de la forma $(\tilde{u}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ donde $\tilde{u}$ corresponde a la coordenada a lo largo de $I\!R$ y $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ son coordenadas de S^2; de manera tal que $\tilde{u} = cte.$ determine una sección de scri.

Para completar nuestro sistema de coordenadas en un entorno del infinito nulo futuro definiremos la coordenada asintótica r como el parámetro afín a lo largo de geodésicas nulas que según sus características geométricas determinarán los sistemas de coordenadas y las tetradas utilizadas en este trabajo.

Llamamos *tetrada estándar*[2] a la definida por las geodésicas nulas ortogonales a las superficies $\tilde{u} = cte.$ que llegan a $\mathscr{I}^+$. Tenemos entonces un sistema de coordenadas (u, r, x_2, x_3) en una vecindad de scri en la variedad M, donde $u = \tilde{u}$, $x_2 = \tilde{x}_2$ y $x_3 = \tilde{x}_3$ en $\mathscr{I}^+$. Por construcción las geodésicas tendrán twist nulo.

En nuestro sistema de coordenadas, $u = cte.$ define hipersuperficies nulas en el interior de la variedad M con vector normal ℓ_a

$$\ell_a = (du)_a \quad . \tag{2.1}$$

La tetrada adaptada a esta geometría puede ser escrita en este sistema de coordenadas como:

$$\ell^a = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \tag{2.2}$$

$$m^a = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \tag{2.3}$$

$$n^a = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a + U\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \qquad i = 1,2 \tag{2.4}$$

A través de una rotación espacial[5] es posible hacer que el coeficiente de spin ε del formalismo de GHP[3] se anule, esto es:

$$\varepsilon = 0 \tag{2.5}$$

Fijando la libertad remanente en la coordenada radial[2]

$$r \rightarrow r - r_0(u, x^2, x^3) \ , \tag{2.6}$$

hacemos que la expansión ρ se comporte como:

$$\rho = -\frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \ ; \tag{2.7}$$

lo que es equivalente a decir que r coincide en los primeros dos órdenes con la distancia de luminosidad r_L. Esta transformación no solo simplifica el comportamiento de ρ, sino que también le da relevancia física a r.

Definimos la *'tetrada rotante'* basando la construcción anterior en la congruencia de geodésicas nulas tales que ψ_1^0 (término asintótico principal de la componente espinorial ψ_1 del tensor de Weyl) sea igual a cero. Esto es posible porque determina sólo la condición inicial para las geodésicas nulas 'entrantes'.

Esta congruencia de geodésicas nulas tendrá en general twist no nulo por lo que la expansión ρ será compleja. Tomaremos como coordenada 'radial' r al parámetro afín a lo largo de las geodésicas, cuyo origen es determinado de manera tal que

$$\rho + \bar{\rho} = -\frac{2}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) , \tag{2.8}$$

que corresponde al criterio análogo al anterior. Se puede definir entonces un sistema de coordenadas donde la tetrada *"rotante"* queda expresada como

$$\ell^a = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \tag{2.9}$$

$$m^a = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \tag{2.10}$$

$$n^a = U\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \tag{2.11}$$

$$\varepsilon = 0 \qquad i = 0,2,3 \qquad x^0 = t, \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered}\{t,\, x^2, x^3\} \to \{\tilde{u},\, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\} \\ r \to \infty\end{gathered} \tag{2.13}$$

Pensaremos además que nuestro sistema de coordenadas en scri $(\tilde{u}, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ es de Bondi para ambas tetradas.

3 Tensor de Weyl de espacio-tiempos asintóticamente planos y estacionarios en gravedad linearizada

Las identidades de Bianchi linearizadas se caracterizan por depender de los coeficientes de espín a orden cero solamente. En el caso de espacio-tiempos vacíos estacionarios y asintóticamente planos, éstas condicionan el comportamiento angular, de los términos del desarrollo en potencias negativas de r de las diferentes componentes espinoriales del tensor de Weyl. En las ecuaciones siguientes se muestra la forma de estos términos para los datos libres requerida por las identidades de Bianchi. Notamos entonces que la parte monopolar del tensor de Weyl se manifiesta en ψ_2^0; mientras que el aspecto dipolar aparece en ψ_1^0, que es combinación lineal de armónicos esféricos de $\ell = 1$. Los momentos cuadrupolares o mayores están determinados por los términos de ψ_0 según muestra la siguiente ecuación:

$$\psi_0 = \sum_{\ell=2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{a^{\ell m}}{r^{\ell+3}}\ {}_2Y_{\ell m} \tag{3.1}$$

$$\psi_2^0 = -M \tag{3.2}$$

$$\psi_1^0 = \sum_{m=-1}^{1} b^{1m}\ {}_1Y_{1m} \ , \tag{3.3}$$

donde los ${}_sY_{\ell m}$ son los armónicos esféricos con peso de espín s, y los $a^{\ell m}$, b^{1m} junto con M son constantes. Por ser el espacio-tiempo estacionario y asintóticamente plano[(2)] se tiene que:

$$\psi_3^0 = \psi_4^0 = 0 \ . \tag{3.4}$$

De esta forma obtenemos la estructura multipolar de Weyl requerida por las identidades de Bianchi para el caso de gravedad linearizada en espacio-tiempos asintóticamente planos.

4 Espacio-tiempo monopolar

En la sección anterior revisamos el comportamiento multipolar de las componentes del tensor de Weyl estacionario en gravedad linearizada. Basándonos en este resultado definiremos como espacio monopolar a un espacio-tiempo asintóticamente plano y estacionario que cumple con las condiciones asintóticas del tensor de Weyl monopolar linearizado.

Teorema 1: Sea un espacio-tiempo: vacío, estacionario, asintóticamente plano, y donde además valen las siguientes condiciones asintóticas: En la tetrada estándar $\psi_0 = \psi_1^0 = 0$ y $\psi_2^0 \neq 0$ (Weyl monopolar). Entonces el espacio-tiempo corresponde a la métrica de Schwarzschild.

5 Espacio-tiempo monopolar con momento angular

Ahora queremos incluir momento angular a nuestro sistema. Por lo que a continuación daremos dos definiciones diferentes de espacio-tiempo monopolar con momento angular; adaptadas a cada una de nuestras tetradas de acuerdo a lo aprendido del análisis lineal.

a) La primer definición de espacio-tiempo monopolar con momento angular es: el espacio-tiempo asintóticamente plano estacionario, que al ser descripto con la tetrada estándar se caracteriza por:

$$\psi_0 = 0 \quad , \quad \psi_1^0 \neq 0 \quad , \quad \psi_2^0 \neq 0 .$$

b) En la segunda definición caracterizamos un espacio-tiempo monopolar con momento angular basándonos en la tetrada rotante con twist no nulo. Haciendo uso de esta tetrada pedimos las siguientes condiciones sobre las componentes del tensor de Weyl:

$$\psi_0 = 0 \ , \ \psi_2^0 \neq 0 \ .$$

Integrando las ecuaciones de Einstein en el formalismo de GHP en función de los datos requeridos por la primera definición hemos obtenido la solución exacta de Newman & Tamburino[6].

Las ecuaciones de campo de la relatividad general junto con las condiciones de la definición b) implican el siguiente teorema.

Teorema 2: Sea un espacio-tiempo estacionario tal que cumpla con la definición b) de espacio-tiempo monopolar con momento angular entonces la integración de las ecuaciones de campo de vacío conducen a la solución exacta de Kerr-NUT[4].

A continuación se muestran estas componentes de la tetrada:

$$\xi^i = \frac{\xi_0^i}{\left(r - i\,a\cos(\theta) + i\,B\right)} \tag{5.1}$$

$$X^i = \delta_0^i - \frac{\left(\tau_0 \bar{\xi}_0^i + \bar{\tau}_0 \xi_0^i\right)}{\left(r^2 + \left(a\ \cos\ (\theta) - B\right)^2\right)} \tag{5.2}$$

$$U = -\frac{1}{2} - \frac{\tau_0 \bar{\tau}_0}{\left(r^2 + \left(a\ \cos\ (\theta) - B\right)^2\right)} + \frac{Mr}{\left(r^2 + \left(a\ \cos\ (\theta) - B\right)^2\right)} \ . \tag{5.3}$$

Donde M, a y B son constantes y

$$\tau_0 = -i\,\eth^\circ\left(a\cos(\theta)\right) \tag{5.4}$$

$$\xi_0^0 = i\,a\left(\eth^\circ\left(\cos(\theta)\right) - \bar{\eth}^\circ\left(\cos(\theta)\right)\right) \tag{5.5}$$

$$\xi_0^2 = i\xi_0^3 = \sqrt{2}\ P_0 \tag{5.6}$$

donde $\eth^\circ$ es el operador edth del formalismo de GHP de la esfera unidad.

Hemos obtenido la solución exacta de Kerr-NUT a partir de la caracterización asintótica del tensor de Weyl para un espacio-tiempo monopolar con momento angular. Notar que esta tetrada no coincide con las que aparecen en la literatura.

6 Comentarios

Esta manera de obtener soluciones exactas, a partir de datos en el infinito nulo provenientes de gravedad linearizada, muestran la posibilidad de distinguir aquellas soluciones de relevancia física con una interpretación bien definida.

Los resultados de la sección (5) sugieren que la tetrada rotante es la más adecuada para el análisis de las ecuaciones de campo en los casos de espacio-tiempos con momento angular.

Hemos intentado introducir momentos mayores con la misma filosofía pero la integración se complica de manera considerable; sin embargo parece ser posible construir, en todo caso, una solución asintótica.

Esta metodología se puede extender a espacio-tiempos no vacíos, como los de Einstein-Maxwell. De una manera análoga estamos estudiando la posibilidad de dar una definición de espacio-tiempo monopolar con carga eléctrica. Parece interesante también la idea de generalizar estos resultados incluyendo momento dipolar electromagnético a la caracterización asintótica e intentar dar una interpretación física clara a soluciones exactas de Einstein-Maxwell.

Agradecimientos

A.P. es becario de CONICOR. O.M es investigador del CONICET. Este trabajo fue realizado con ayuda de la Fundación Antorchas, CONICOR y la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNC.

Apéndice: tetrada general basada en una congruencia de curvas nulas

Presentamos la definición general de una tetrada adaptada a una congruencia de curvas nulas y las consiguientes relaciones de metricidad y sin torsión de la métrica en el formalismo de GHP.

Las ecuaciones presentadas en esta sección son la generalización de las ecuaciones que relacionan los coeficientes de espín y las componentes de las tetradas estándar[2] y rotante a tetradas generales adaptadas a congruencias de curvas nulas.

Definiendo convenientemente el sistema de coordenadas la tetrada queda expresada como:

$$\ell^a = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \tag{A.1}$$

$$m^a = \omega\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + \xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \tag{A.2}$$

$$n^a = U\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \qquad \text{(A.3)}$$

donde ahora el índice i puede adquirir los valores:

$$i = 0,2,3$$

Notemos que ahora n^a y m^a tienen todas las componentes; por lo tanto esta es la tetrada más general compatible con la ec. (A.1).

Las relaciones de metricidad y de no torsión determinan las siguientes ecuaciones para las componentes de la tetrada en término de los coeficientes de espín:

$$U_r = (\varepsilon' + \bar{\varepsilon}') + \left[(\tau - \bar{\tau}')\bar{\omega} + (\bar{\tau} - \tau')\omega\right] + U(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \qquad \text{(A.5)}$$

$$X^i_r = (\tau - \bar{\tau}')\bar{\xi}^i + (\bar{\tau} - \tau')\xi^i - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})X^i \qquad \text{(A.6)}$$

$$\omega_r = (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\omega + \sigma\bar{\omega} + (\bar{\beta}' - \beta - \bar{\tau}') - \kappa U \qquad \text{(A.7)}$$

$$\xi^i_r = (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\xi^i + \sigma\bar{\xi}^i - \kappa X^i \qquad \text{(A.8)}$$

$$U\omega_r + X^k\omega_k - \omega U_r - \xi^k U_k = (\beta - \bar{\beta}' - \tau)U - \bar{\kappa}' + (\varepsilon' - \bar{\varepsilon}' - \rho')\omega - \sigma'\bar{\omega} \qquad \text{(A.9)}$$

$$U\xi^i_r + X^k\xi^i_k - \omega X^i_r - \xi^k X^i_k = (\beta - \bar{\beta}' - \tau)X^i + (\varepsilon' - \bar{\varepsilon}' - \rho')\xi^i - \sigma'\bar{\xi}^i \qquad \text{(A.10)}$$

$$\omega\bar{\omega}_r + \xi^p\bar{\omega}_p - \bar{\omega}\omega_r - \bar{\xi}^p\omega_p = (\rho - \bar{\rho})U + (\bar{\rho}' - \rho') + (\bar{\beta} + \beta')\omega - (\beta + \bar{\beta}')\bar{\omega} \qquad \text{(A.11)}$$

$$\omega\bar{\xi}^i_r + \xi^p\bar{\xi}^i_p - \bar{\omega}\xi^i_r - \bar{\xi}^p\xi^i_p = (\rho - \bar{\rho})X^i + (\bar{\beta} + \beta')\xi^i - (\beta + \bar{\beta}')\bar{\xi}^i \qquad \text{(A.12)}$$

En el caso $\kappa = \varepsilon = \omega = \rho - \bar{\rho} = 0$ las ecuaciones anteriores se reducen a las de la tetrada estándar.

Cuando $\kappa = \varepsilon = \omega = 0$ obtenemos las ecuaciones de la tetrada rotante.

Referencias:

1- O. Moreschi, Class. Quantum Grav., 3, 503, (1986).

2 O. Moreschi, Class. Quantum Grav., 4, 1063, (1987).

3- R. Geroch, A. Held and R. Penrose, J. Math. Phys., 14, 7, 874, (1973).

4- M. Demianski and E.T. Newman, Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences, XIV, 11, 653, (1966).

5- C.R. Prior, Proc. R. Soc. Lond. A, 354, 379, (1977).

6- E.T. Newman and L.A. Tamburino, J. Math. Phys., 6, 6, 902, (1962).