

# Formación y evolución de crestas en flujos convergentes de líquidos no Newtonianos

Julio Gratton<sup>1,2,\*</sup> y Carlos Alberto Perazzo<sup>1,3,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Investigador del CONICET.

<sup>2</sup>INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

<sup>3</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

Investigamos la evolución de la cresta producida por el movimiento convergente de dos substratos sobre los cuales reposa una capa de un líquido no Newtoniano con reología del tipo ley de potencia. Para tiempos cortos tanto la altura como el ancho aumentan como  $t^{1/2}$  independientemente de la reología del líquido. Para tiempos largos el ancho y el alto de la cresta siguen leyes de potencia cuyo exponente depende del índice reológico.

We investigate the evolution of the ridge produced by the convergent motion of two substrates on which a layer of a non-Newtonian power-law liquid rests. For short times the height and the width increase as  $t^{1/2}$  independently of the rheology of the liquid. For large time the height and the width of the ridge follow power laws whose exponents depend on the rheological index.

## I. INTRODUCCIÓN

Tiempo atrás uno de nosotros [1] dedujo leyes de escala para la evolución de cordilleras a partir de hipótesis físicas sencillas acerca del flujo viscoso causado por el acortamiento de la corteza terrestre. A fin de alcanzar una mejor comprensión de esta clase de flujos investigamos un modelo que consiste de una capa fluida inicialmente uniforme que descansa sobre un substrato horizontal y plano dividido en dos partes, que para  $t > 0$  son empujadas la una hacia la otra. Este movimiento convergente arrastra el líquido de modo de producir una cresta (ver figura 1). En un trabajo anterior [2] estudiamos la evolución del flujo de un líquido Newtoniano y mostramos que existen dos regímenes autosemejantes que se alcanzan en diferentes dominios espacio temporales. Estos regímenes y sus correspondientes leyes de escala se pueden obtener analíticamente. En este trabajo extendemos nuestra investigación al caso de fluidos con reología de ley de potencia, dado que esta reología es más adecuada para describir el comportamiento de la litosfera.

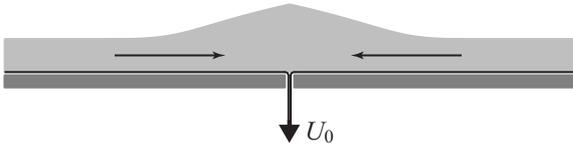


Figura 1: Formación de una cresta debida al movimiento convergente del substrato.

## II. ECUACIONES BÁSICAS

Debido a la simetría nuestro problema es equivalente al de una capa líquida semiinfinita de espesor  $H_0$ , que reposa sobre una superficie rígida horizontal y está confinada a la región  $X > 0$  por una pared vertical impermeable y sin rozamiento situada en  $X = 0$ . En  $T = 0$  el substrato se empieza a mover con velocidad constante  $-U_0$  (luego  $U_0 > 0$ ) de modo que el líquido se acumula contra la pared. Supondremos que la reología es del tipo ley de potencia [3] y está dada por

$$\tau_{ij} = AE^{(1-n)/n} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad E = (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}.$$

Aquí  $\tau_{ij}$  y  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$  son las componentes del tensor de esfuerzos y el tensor velocidad de deformación y  $A$ ,  $n$  son constantes positivas. Para un líquido pseudoplástico  $n > 1$  y para un líquido dilatante  $n < 1$ ; el caso Newtoniano corresponde a  $n = 1$ , en cuyo caso el coeficiente de viscosidad vale  $A/2$ . Valores razonables para la litosfera son  $n = 3$  y  $A \approx 10^{13}$  (c.g.s.) [4]. Despreciaremos la capilaridad y supondremos que el flujo es lento y dominado por la viscosidad de manera que se pueda emplear la aproximación de lubricación. Sea  $H \equiv H(X, T)$  el espesor de la capa líquida y  $U \equiv U(X, T)$  la velocidad horizontal promediada verticalmente. Las condiciones de contorno son  $U(0, T) = 0$  y  $H(\infty, T) = H_0$ . Definimos las variables adimensionales  $u$ ,  $h$ ,  $x$ ,  $t$  por medio de

$$U = U_0 u, \quad H = H_0 h, \quad X = X_0 x, \quad T = \frac{X_0}{U_0} t,$$

donde

$$X_0 = \frac{\rho g}{A} \left[ \frac{2^{1+n} H_0^{2n+1}}{(n+2)U_0} \right]^{\frac{1}{n}},$$

$g$  es la aceleración de la gravedad y  $\rho$  es la densidad del fluido. La ecuación de evolución es:

$$h_t = h_x + s (h^{n+2} |h_x|^n)_x, \quad s \equiv \text{sign}(h_x). \quad (1)$$

\*Correo electrónico: jgratton@tinfipl.flp.uba.ar

\*\*Correo electrónico: perazzo@favaloro.edu.ar

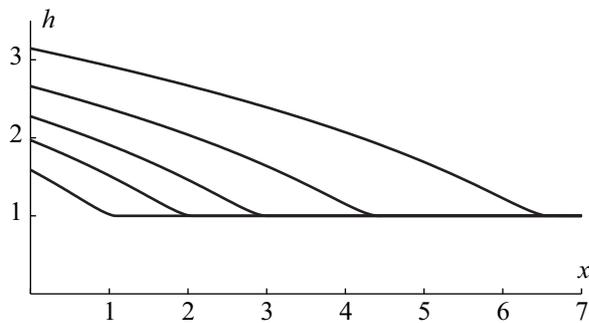


Figura 2: Perfiles numéricos ( $n = 3$ ,  $t = 0.3, 1, 2, 4$  y  $8$ ).

En el caso que estamos considerando  $s = -1$ , por lo tanto las condiciones inicial y de contorno son

$$h(x, 0) = 1, \quad h(\infty, t) = 1, \quad h^{1+\frac{1}{n}} h_x \Big|_{x=0} = -1.$$

El balance de masa implica  $\frac{d}{dt} \left( \int_0^\infty (h - 1) dx \right) = 1$ .

### III. SOLUCIONES NUMÉRICAS

En general este problema no tiene una solución en forma cerrada, por lo que se debe resolver numéricamente. Algunos resultados se muestran en las figuras 2 y 3. Se puede observar que  $h(x)$  tiene un punto de inflexión que inmediatamente después de comenzado el proceso se encuentra próximo a  $x = 0$  y a medida que crece  $t$  se desplaza hacia  $x$  mayores y tiende hacia la parte delantera del relieve, donde  $h$  se aproxima a 1. También se observa (figura 2) que el cociente de aspecto (altura / ancho) disminuye con el tiempo porque el ancho del relieve aumenta más rápidamente que la altura de la cresta, tal como lo prevén las leyes de escala [1].

En la figura 3 se pueden apreciar los perfiles del relieve para  $n = 1, 3$  y  $10$  y para  $t = 0.3$  y  $8$ , esto es para iguales valores de la masa (adimensional) incorporada. Se observa que al crecer  $n$  la cresta es más angosta y más alta. Nótese además que en el pie del relieve (la región donde el valor de  $h$  se acerca a 1) la pendiente cambia tanto más abruptamente cuanto mayor es  $n$ .

### IV. COMPORTAMIENTO PARA $t \ll 1$

La figura 4 muestra la evolución de la altura máxima del relieve en el caso  $n = 3$ . Se puede observar que para  $t$  pequeño el máximo desnivel  $d \equiv h_w - 1$ , donde  $h_w \equiv h(x = 0, t)$ , crece como  $t^{1/2}$ , de igual modo que en el caso Newtoniano [2]. El mismo tipo de comportamiento se obtiene para otros valores de  $n$ . Estos resultados indican la existencia de un régimen autosemejante en el dominio  $t \ll 1$ .

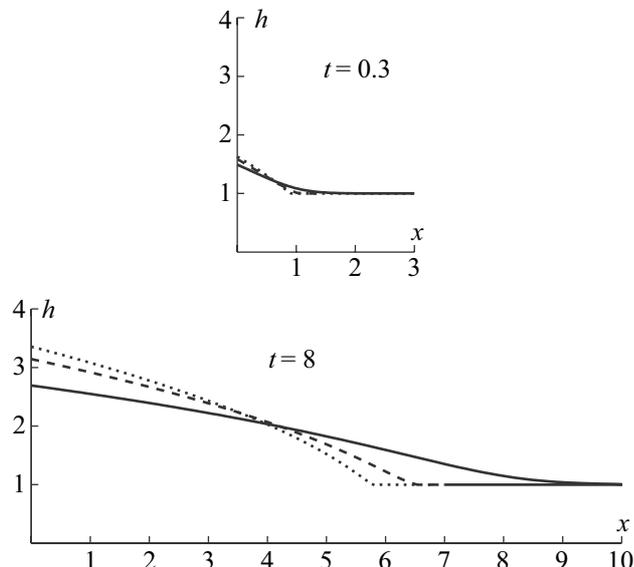


Figura 3: Perfiles numéricos para  $t = 0.3$  (arriba) y  $t = 8$  (abajo) para  $n = 1$  (línea llena),  $3$  (línea de trazos) y  $10$  (línea de puntos).

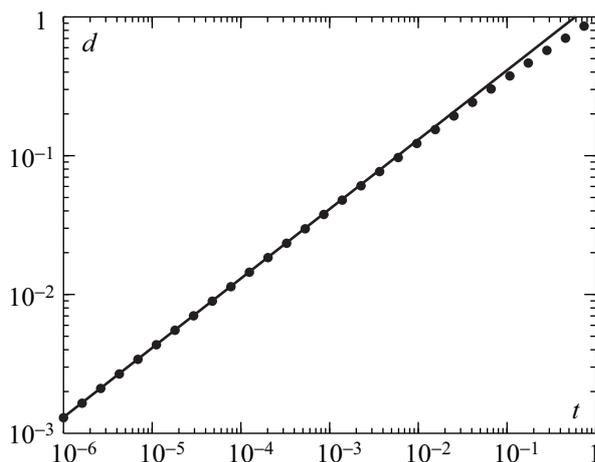


Figura 4: Evolución del desnivel máximo de la cresta. La línea llena corresponde a la ley de escala  $d \propto t^{1/2}$  y los círculos a la solución numérica para  $n = 3$ .

### V. COMPORTAMIENTO PARA $t \gg 1$

La figura 5 muestra el comportamiento de  $d$  para  $n = 3$  y tiempos largos. Se puede observar que se aproxima a la ley de escala  $d \propto t^{n/(1+3n)}$  deducida previamente [1]. Puesto que si  $h_w \gg 1$  entonces  $d \approx h_w$  esto implica que para tiempos grandes  $h_w$  sigue la misma ley de escala que obtuvimos anteriormente [2] para el caso Newtoniano ( $n = 1$ ).

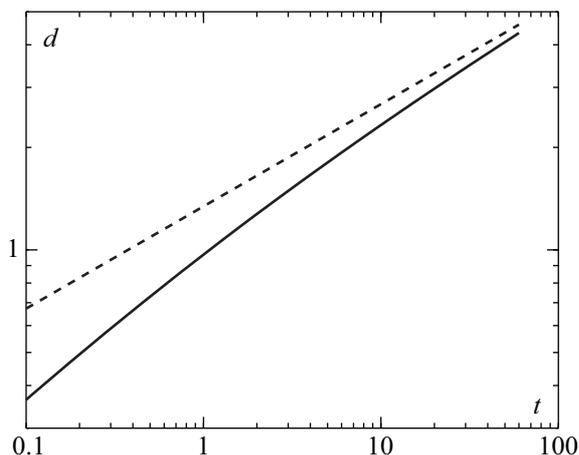


Figura 5: Evolución del desnivel máximo de la cresta para  $n = 3$  y  $t \gg 1$ . La línea llena corresponde a la solución numérica y la línea de trazos a la ley de escala  $d \propto t^{n/(1+3n)}$ .

## VI. CONCLUSIONES

Igual que en el caso Newtoniano la evolución de la cresta ocurre en dos etapas. En la etapa inicial ( $t \lesssim 10^{-2}$ ) el desnivel crece como  $t^{1/2}$  independientemente del índice reológico. Puesto que la masa (adimensional) incorpora-

da al relieve es igual a  $t$ , lo anterior implica que el ancho del perfil crece también como  $t^{1/2}$ ; por lo tanto la razón de aspecto (altura/ancho) se mantiene constante. Sin embargo a medida que aumenta el desnivel el derrame lateral se torna dominante y el grueso de la masa que se incorpora al relieve produce un aumento mayor del ancho del mismo, que entonces crece más rápidamente que la altura. Para tiempos muy grandes ( $t \gtrsim 10^2$ ) el desnivel sigue la ley de escala dependiente del índice reológico que fuera deducida por Gratton a partir de argumentos dimensionales [1]. Análogamente el ancho del relieve sigue la ley de escala de la referencia precedente.

Se puede mostrar que en ambos límites existen asintóticas autosemejantes. Los detalles se publicarán por separado. La transición entre una etapa y la otra ocurre para  $t \approx 1$ , y corresponde a la migración del punto de inflexión de  $h(x, t)$ , que inicialmente está muy cerca de  $x = 0$  y que a medida que  $t \rightarrow \infty$  tiende a coincidir con el pie de la cresta.

## Agradecimientos

Agradecemos los subsidios PIP 5377 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires y PICTR 2002-00094 y PICTO 21360 de la ANPCYT.

- 
- [1] J Gratton, *J. Geophys. Res.* **94**, 15627–15634, 1989.  
 [2] CA Perazzo & J Gratton, *Phys. Fluids* **20**, 043103, 2008.  
 [3] RB Bird, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **8**, 13–34, 1976.

- [4] G Ranalli & DC Murphy, *Tectonophysics* **132**, 281–295, 1987.