

Efecto de una configuración de Kelvin-Helmholtz sobre la inestabilidad 'tearing' de láminas de corriente forzadas por flujos de estancamiento.

Laurence E. Bender^a, Fausto T. Gratton^a y R. M. Galvão^b

^aInstituto de Física del Plasma (INFIP), CONICET y FCEyN-UBA, Ciudad Universitaria, Pab I, 1428, Buenos Aires, Argentina.

^bInstituto de Física, Lab. Plasma, Universidade de São Paulo, CP 66318, 05318-970, São Paulo, SP, Brasil.

email: laurence@tinfipl.fsp.uba.ar

Investigamos la influencia estabilizadora de un flujo de plasma paralelo a una lámina de corriente formada por un movimiento tipo punto de estancamiento, sobre la inestabilidad de "tearing". Damos el análisis de estabilidad para una extensión de esta configuración, la cual es solución exacta de la MHD. El espectro se calcula usando un método matricial con diferencias finitas. Se da la tasa de crecimiento γ en función de los números de Mach-Alfvénico M_A , Lundquist S y Prandtl magnético P_m . Mostramos (para $P_m=1$) la estabilización del modo "tearing" por Kelvin-Helmholtz cuando $M_A < 1$. El efecto de la viscosidad tiende a reducir las tasas de crecimiento. Se confirma, en el caso $v_0=0$, la dependencia de γ con el número de Hartmann $H_s=S/P_m^{1/2}$.

We study the stability of a driven current sheet with a magnetic field normal to a stagnation point flow and parallel to a velocity shear. The configuration is an exact solution of the MHD equations with resistivity and viscosity. The eigenvalues and eigenfunctions of the stability problem are studied numerically using a finite difference matrix method. The growth rate γ is given as a function of the Lundquist number S , the Mach-Alfvénic number M_A and the magnetic Prandtl number P_m . It is found that the tearing mode is stabilized for $M_A < 1$ (when $P_m=1$). The presence of viscosity tends to reduce the growth rates of the instability. The dependence of γ on the Hartmann number $H_s=S/P_m^{1/2}$ is confirmed in the case of a static equilibrium current sheet.

I INTRODUCCION

La inestabilidad de corte de las líneas magnéticas (en inglés "tearing") es la más importante de las inestabilidades resistivas en plasmas¹⁻². En estos modos se viola la restricción topológica característica de la magnetohidrodinámica ideal: la preservación de la identidad de las superficies magnéticas. La difusión resistiva permite la ruptura de las líneas magnéticas y su posterior reconexión, para dar lugar al crecimiento de una configuración de isla magnética que lleva a un estado de menor energía. El efecto de la resistividad se manifiesta principalmente en pequeñas capas límites resistivas conocidas como láminas de corriente, que rodean las superficies singulares del campo magnético.

En la teoría clásica de estos modos resistivos se consideran configuraciones estáticas de plasma con una lámina de corriente en equilibrio difusivo. Sin embargo, la presencia de un flujo de plasma puede modificar sustancialmente el desarrollo de la inestabilidad. Por otra parte, la consideración de configuraciones de equilibrio no estáticas tiene particular interés en aplicaciones astrofísicas, por cuanto se observan en las prominencias solares, la magnetopausa terrestre y en chorros ("jets") extragalácticos³.

El estudio de la estabilidad de láminas de corriente sostenidas por un flujo con un punto de estancamiento constituye una variante novedosa dentro de la teoría. La configuración de equilibrio es una solución exacta de las ecuaciones MHD. Esto permite realizar el análisis de la estabilidad sin las limitaciones usuales a valores pequeños de la resistividad y viscosidad. Las ecuaciones

perturbativas resultantes se resuelven en forma numérica, usando un método matricial con diferencias finitas para calcular los autovalores y las autofunciones del problema.

II CONFIGURACION DE EQUILIBRIO Y ECUACIONES PERTURBATIVAS

Las ecuaciones magnetohidrodinámicas que describen el flujo de un plasma incompresible con resistividad y viscosidad son

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho c} \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \nu \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nu_m \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{j} = (c/4\pi) \nabla \times \mathbf{B}$; ρ es la densidad (constante) y ν , ν_m son, respectivamente, la viscosidad cinemática y difusividad magnética (unidades cgs-ues; c es la velocidad de la luz en el vacío).

En este trabajo se investiga la estabilidad de una extensión de la configuración de Phan & Sonnerup⁴, que consiste en una lámina de corriente sostenida por un flujo irrotacional con un punto de estancamiento en el plano normal a la dirección del campo magnético (fig. 1). Agregando una componente adicional de velocidad $v_{0z}(Y)$ paralela al campo magnético, se obtiene una solución exacta de equilibrio dada por

$$\mathbf{v}_0 = (aX, -aY, U_0 \operatorname{erf} \left\{ \frac{Y}{\sqrt{2}h} \right\}), \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_0 = (B_r \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{Y}{h} \right)^2 \right\}, 0, B_0 \operatorname{erf} \left\{ \frac{Y}{\sqrt{2}h} \right\}), \quad (5)$$

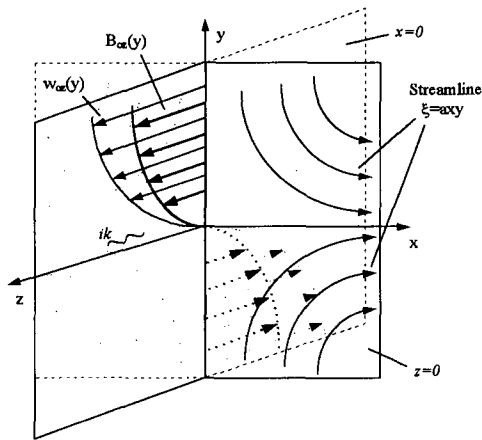


Figura 1. Configuración de equilibrio.

donde a , B_T , B_0 , U_0 , son constantes, y $h_v=(v/a)^{1/2}$, $h=(v_m/a)^{1/2}$ son las escalas de longitud de las láminas de vorticidad y corriente iniciales. Cabe notar que las dos escalas de longitud no son independientes. Por otra parte, como el equilibrio es exacto se puede analizar la estabilidad para el rango completo de valores de S (en particular valores de S del orden de la unidad).

Expresando la velocidad y el campo magnético como $v=v_0+v_1$ y $B=B_0+B_1$, se consideran perturbaciones de la forma

$$f_1=f_1(Y)\exp(\lambda t+ik_z z).$$

Las ecuaciones magnetohidrodinámicas linealizadas se pueden escribir en términos de las variables v_{1y} y B_{1y} , que corresponden a las perturbaciones de la velocidad y del campo magnético normales a la lámina de corriente. Las ecuaciones perturbativas resultantes para $v=v_{1y}/v_A$ y $B=iB_{1y}/B_0$, donde $v_A=B_0/(4\pi p)^{1/2}$ es la velocidad de Alfvén, son

$$(p-Dy+P_m N)Nv+ikSM_A(WN+W'')v=-kS(\beta N+\beta'')B, \quad (6)$$

$$(p+1-yD+N)B+ikSM_AWB=kS\beta v, \quad (7)$$

donde se han definido las siguientes magnitudes adimensionales,

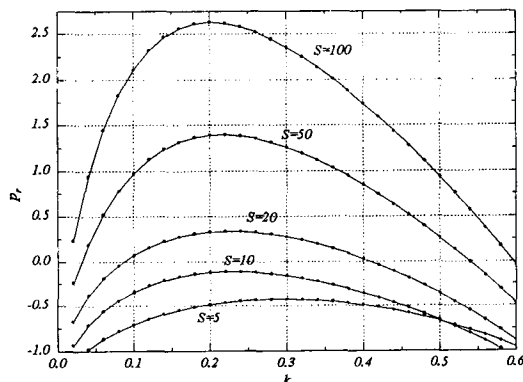


Figura 2. Tasas de crecimiento para modos resistivos puros con $P_m=10^{-5}$.

$$p = \frac{\lambda}{a}, \quad k = k_z h = k_z \sqrt{\frac{v_m}{a}}, \quad y = \frac{Y}{h}, \quad \beta = \frac{B_{0z}}{B_0},$$

$$W = \frac{v_{0z}}{U_0}, \quad S = \frac{v_A h}{v_m} = \frac{v_A}{\sqrt{a} v_m}, \quad M_A = \frac{U_0}{v_A}, \quad P_m = \frac{\nu}{v_m}$$

y los operadores $D=d/dy$, $N=k^2-D^2$. En (6)-(7) aparecen tres parámetros adimensionales: el número de Lundquist S , un número de Mach-Alfvénico M_A y el número de Prandtl magnético P_m .

Estas ecuaciones definen un problema de autovalores para p , que se resuelve usando un método matricial con diferencias finitas⁵. Las ecs. (6)-(7) se reemplazan por ecuaciones en diferencias, donde las derivadas se aproximan por desarrollos de Taylor en función de los valores de las variables dependientes sobre una grilla numérica. El resultado final es una ecuación matricial de la forma

$$[A+pB]\phi=0, \quad (8)$$

donde A , B son matrices de coeficientes complejos y $\phi=(v_1, v_2, \dots, v_N, B_1, B_2, \dots, B_N)^T$ es un vector formado por los valores de la velocidad y del campo magnético perturbativos en los puntos de la grilla. Los autovalores p y las autofunciones correspondientes se obtienen a partir de (8) usando el método QR para matrices⁶.

III INTERPRETACION DE P_m

El número de Prandtl magnético es un parámetro importante en la determinación de la estabilidad, cuya interpretación depende la configuración particular que se está considerando. Si no hay componente inicial de velocidad en la dirección z , es decir $v_{0z}=0$ ($M_A=0$), el problema tiene una sola escala de longitud h . En este caso P_m se puede escribir como

$$P_m = \frac{\nu}{(ah)h} = \frac{1}{R_e} \quad (9)$$

donde R_e es el número de Reynolds definido usando la velocidad ah con que ingresa el plasma en $Y=h$. En consecuencia, el valor de P_m mide el efecto de la viscosidad sobre el desarrollo de la inestabilidad resistiva. Para $P_m \ll 1$ ($R_e \gg 1$) los efectos viscosos son pequeños.

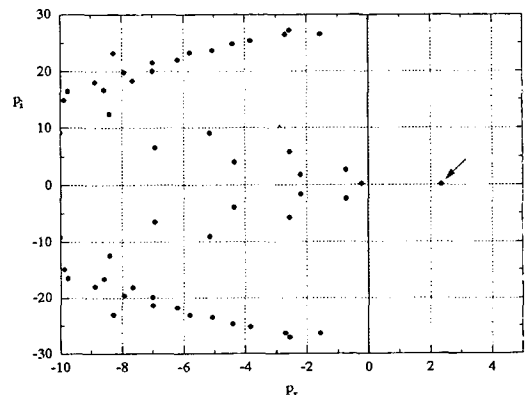


Figura 3. Espectro de autovalores para $k=0.3$, $S=100$, $P_m=10^{-5}$ y $M_A=0$.

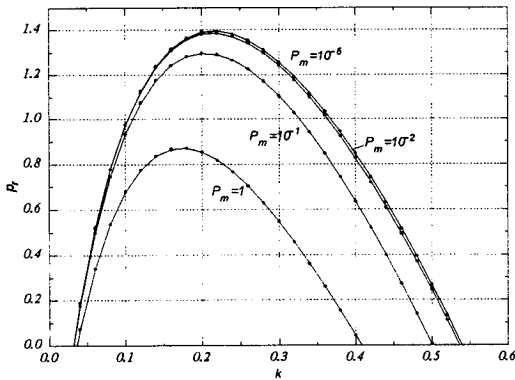


Figura 4. Influencia de la viscosidad en modos resistivos con $S=50$.

En cambio, cuando $M_A \neq 0$ pueden existir modos de tipo Kelvin-Helmholtz, además de los modos resistivos. En este caso existen dos escalas de longitud que se vinculan entre sí de la forma

$$\frac{h_v}{h} = \left(\frac{v}{v_m} \right)^{1/2} = P_m^{1/2}. \quad (10)$$

Por lo tanto, en flujos con $v_{0z} \neq 0$ el número de Prandtl magnético mide la relación entre las escalas de longitud de la lámina de vorticidad y lámina de corriente iniciales. Valores de $P_m \gg 1$ corresponden a configuraciones en donde la lámina de corriente es mucho más delgada que la lámina de vorticidad. En estas condiciones cabe esperar que domine el crecimiento de la inestabilidad resistiva, por cuanto el perfil de velocidades es prácticamente uniforme dentro de la lámina de corriente. Por el contrario, valores de $P_m \ll 1$ implican que $h_v \ll h$. En estos casos los gradientes de la velocidad son más importantes que los del campo magnético, con lo que se favorece el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

IV MODOS TEARING CON $W=0$ ($M_A=0$)

En la fig. 2 se grafican las tasas de crecimiento $p_r = \text{Re}(p)$ como función del número de onda k , para modos con $P_m = 10^{-5}$ y variando el número de Lundquist S . Los valores calculados coinciden con los obtenidos por Phan & Sonnerup⁴, quienes usaron un método de cálculo diferente. Las curvas muestran que el flujo de estancamiento $v_0 = (aX, -aY)$ tiende a estabilizar la configuración, pues a medida que aumenta su fuerza (valores mayores de a) disminuye el valor de S (al reducirse el ancho de la lámina de corriente $h = (v_m/a)^{1/2}$). La configuración se vuelve estable, es decir p_r es siempre negativo, para valores de S menores que el valor crítico $S_c = 12.25$.

Cuando $S > S_{\text{crítico}}$ se observa que la región de inestabilidad está limitada por dos estados marginales ($p_r = 0$), uno de número de onda grande k_{sup} (longitud de onda pequeña) y otro de número de onda pequeño k_{inf}

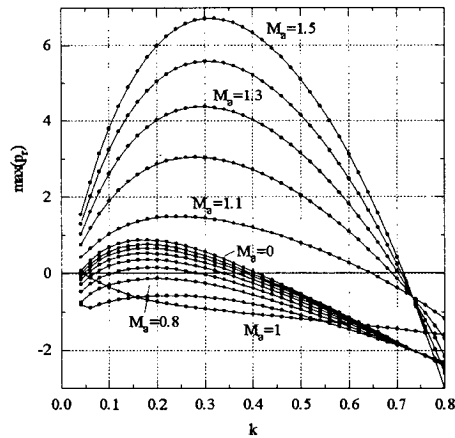


Figura 5. Tasas de crecimiento máximas para $S=50$.

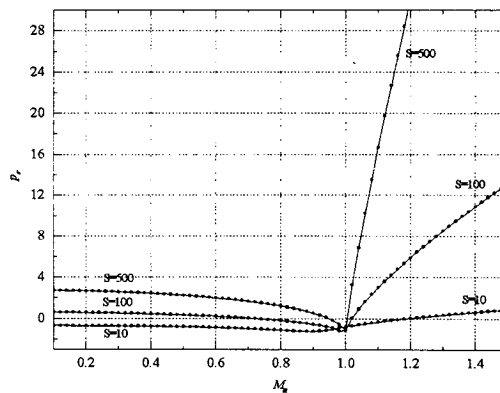


Figura 6. Tasas de crecimiento máximas para $k=0.4$ ($S=\text{cte}$).

(longitud de onda grande). En efecto, se puede demostrar a partir de (6)-(7) que la configuración es estable en el límite de $k=0$. Por lo tanto, como la lámina de corriente siempre es inestable para algún valor de k para $S > S_{\text{crítico}}$, existe un estado marginal correspondiente a un valor pequeño (pero finito) de $k = k_{\text{inf}}$. La existencia de una rama inferior de estabilidad marginal distingue a estas configuraciones del caso de una lámina de corriente en equilibrio difusivo, donde solamente existe la rama superior.

El método numérico utilizado para obtener las tasas de crecimiento también proporciona una aproximación al espectro completo de autovalores. En la fig. 3 se muestran algunos de los autovalores para el caso $k=0.3$, $S=100$ y $P_m=10^{-5}$. La flecha indica el autovalor real correspondiente al modo inestable. Los demás autovalores tienen parte real negativa y corresponden a modos estables con una componente oscilatoria. A diferencia del trabajo de Phan & Sonnerup, en donde se buscaban los autovalores usando un método básicamente de prueba y error, la forma de cálculo empleado aquí permite asegurar la existencia de un solo modo inestable.

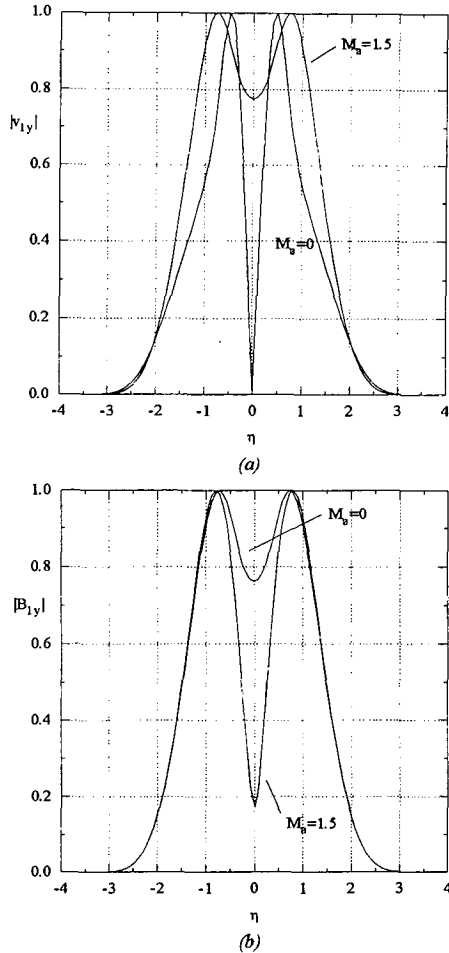


Figura 7. Autofunciones de la velocidad y del campo magnético ($S=100, k=0.4$).

El efecto de la viscosidad sobre las tasas de crecimiento se muestra en la fig. 4, donde se varía el número de Prandtl magnético P_m manteniendo $S=50$. La presencia de viscosidad tiende a reducir la tasa de crecimiento de la inestabilidad. Este efecto es más importante para valores grandes del número de onda k cuando $P_m > 10^{-2}$.

V EFECTOS COMBINADOS ($M_A \neq 0$) CON $P_m=1$

Cuando $P_m=1$ las escalas de longitud de las láminas de corriente y de vorticidad iniciales son iguales: $h=h_v$. En la fig. 5 se grafican las tasas de crecimiento (máximas) como función del número de onda k , para modos con $S=50$ y distintos valores de M_A . El número de Mach-Alfvénico M_A mide la importancia relativa de la velocidad v_{oz} con respecto a la velocidad de Alfvén. La curva con $M_A=0$ corresponde al caso sin velocidad en la dirección z , (sección IV). A medida que crece el valor de M_A se reducen las tasas de crecimiento, a tal punto que la configuración se estabiliza completamente para $M_A=0.8$. Para valores de $M_A > 1$ se observa un salto importante en

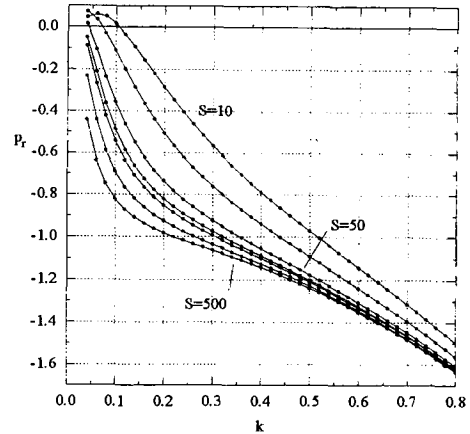


Figura 8. Tasas de crecimiento para $M_A=1$.

el valor de las tasas de crecimiento, que superan ampliamente los correspondientes a $M_A < 1$.

Por lo tanto el número de Mach-Alfvénico determina dos regiones de inestabilidad. Los puntos con $M_A < 1$ corresponden a modos "tearing" que son estabilizados por la presencia de $v_{oz}(y)$. En cambio, cuando $M_A > 1$ se desarrollan inestabilidades de Kelvin-Helmholtz, con tasas de crecimiento mayores que las correspondientes a los modos resistivos. La máxima estabilización se produce para valores de $M_A \sim 1$. Esta separación del problema en dos regiones se puede apreciar claramente en la fig. 6, donde se muestran las tasas de crecimiento como función de M_A .

La separación en dos regiones de inestabilidad también se manifiesta en la forma espacial y paridad de las autofunciones. En la fig. 7a se grafican las autofunciones de la velocidad para el caso $k=0.4$ y $S=100$, con $M_A=0$ y $M_A=1.5$. La solución con $M_A=0$ es antisimétrica, como corresponde a un modo resistivo puro, mientras que para $M_A=1.5$ el perfil de la velocidad adquiere la simetría par asociada con los modos de Kelvin-Helmholtz. Las autofunciones del campo magnético, fig. 7b, también presentan esta inversión de paridad con el aumento de M_A . Cuando $M_A=0$ el campo magnético perturbativo es simétrico con respecto al origen (modos "tearing"), pero a medida que aumenta M_A tiende a una solución antisimétrica.

Como muestran los ejemplos previos, la máxima estabilización se produce para valores de M_A que son del orden de $M_A \sim 1$. En la fig. 8 se grafican las tasas de crecimiento correspondientes a $M_A=1$ para distintos valores de S . La configuración es estable para todos los valores de S considerados cuando $k > 0.1$. También se observa a partir del gráfico que la estabilización es más importante para valores grandes de S .

VI EFECTOS COMBINADOS CON $P_m \neq 1$

En las figs. 9-10 se grafican las tasas de crecimiento para configuraciones con $P_m \neq 1$. La fig. 9 muestra dos casos con $P_m < 1$, donde el ancho de la lámina de corriente inicial h es mayor que el ancho h_v de la lámina de

vorticidad. Las curvas obtenidas son cualitativamente similares a las de la fig. 5, que corresponden al caso $P_m=1$. Sin embargo, las tasas de crecimiento de la Kelvin-Helmholtz son mayores y la transición hacia estos modos se produce a valores menores de M_A . Como se señaló previamente, cuando $P_m < 1$ los gradientes de la velocidad son más importantes que los del campo magnético y se favorece el desarrollo de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Cuando $P_m > 1$ ($h < h_v$) los modos de Kelvin-Helmholtz son fuertemente estabilizados (fig. 10). El efecto de la viscosidad se vuelve especialmente importante para valores de $P_m \gg 1$, en cuyo caso también disminuyen las tasas de crecimiento de los modos "tearing" (fig. 10b). En estas configuraciones se generan modos de Kelvin-Helmholtz solamente para valores de $k \ll 1$ (longitudes de onda muy grandes con respecto al ancho de la lámina de corriente $h = (v_m/a)^{1/2}$).

VII DEPENDENCIA CON EL NUMERO DE HARTMANN

En el caso de una lámina de corriente en equilibrio difusivo con

$$v_0 = 0, \quad (11)$$

$$B_0 = B_0 \tanh(Y/h) \cdot e_x, \quad (12)$$

y perturbaciones de la forma $\phi = \phi(Y) \exp(ik_x x + \gamma t)$, las ecuaciones perturbativas resultantes son

$$(p + P_m N) N \zeta_1 = -S^2 (\beta N + \beta'') b_{1y}, \quad (13)$$

$$(p + N) b_{1y} = k^2 \beta \zeta_1, \quad (14)$$

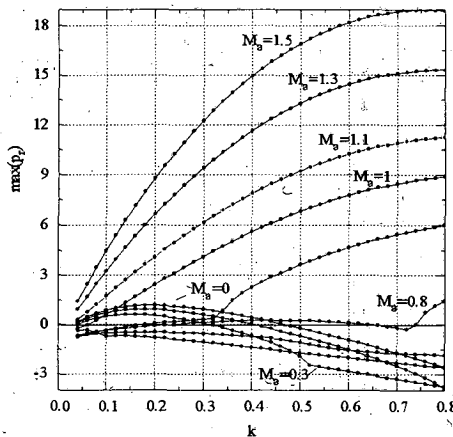
donde

$$D = d/dy, \quad N = k^2 - D^2, \quad k = k_x h,$$

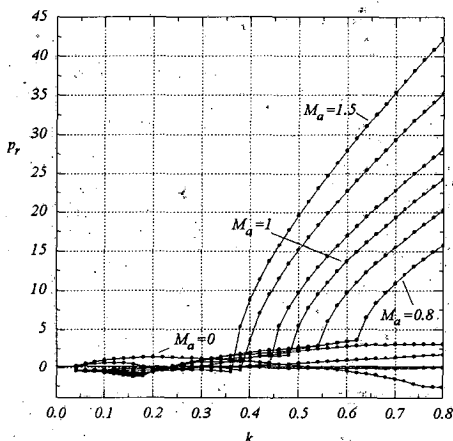
$$\beta = \frac{B_{0x}(y)}{B_0}, \quad \zeta_1 = \frac{\xi_1}{v_m} (v_{1y} = -ik \xi_1), \quad b_{1y} = \frac{B_{1y}(y)}{B_0},$$

$$P_m = \frac{v}{v_m}, \quad S = \frac{B_0 h}{\sqrt{4\pi\rho v_m}}$$

La fig. 11 muestra la tasa de crecimiento p como función de P_m para $k=0.2$. De abajo hacia arriba las curvas corresponden a $S=10^3, S=10^4, S=10^5, S=10^6$ y $S=10^7$. En el gráfico también se muestra la dependencia de la tasa de crecimiento con el número de Hartmann $H_a = S/P_m^{1/2}$, dentro de la región del espacio de parámetros explorada ($P_m \gg 1$). Los valores de p son constantes sobre las líneas horizontales con $H_a^2 = cte$. Este resultado, que se

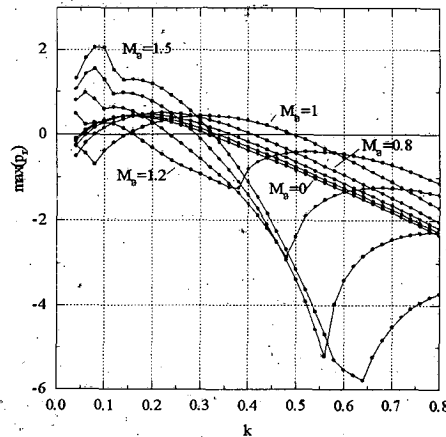


(a)

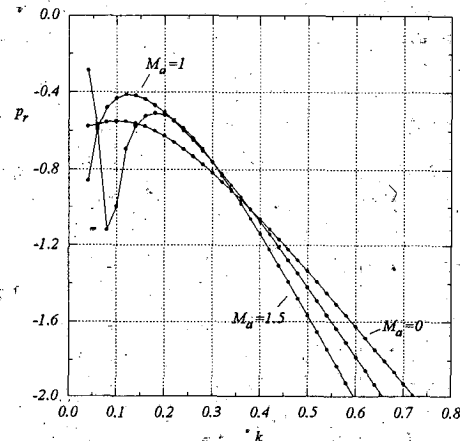


(b)

Figura 9. Tasas de crecimiento máximas para $S=50$ con $P_m=0.25$ (a) y $P_m=0.01$ (b).



(a)



(b)

Figura 10. Tasas de crecimiento máximas para $S=50$ con $P_m=4$ (a) y $P_m=100$ (b).

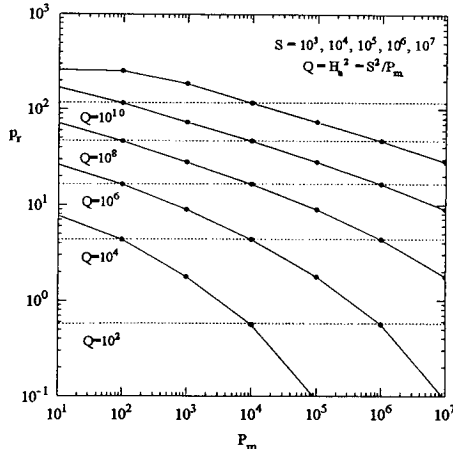


Figura 11. Dependencia de la tasa de crecimiento con el número de Hartmann ($v_0=0$).

puede derivar en forma analítica suponiendo $|p| \ll P_m$, confirma los resultados obtenidos en trabajos previos usando métodos numéricos diferentes para calcular los autovalores⁷.

VIII CONCLUSIONES

Se estudió la estabilidad de una lámina de corriente sostenida por un flujo con un punto de estancamiento, con una componente adicional de velocidad paralela al campo magnético. Estas configuraciones se distinguen por poseer una solución exacta de equilibrio, lo que permite resolver el problema perturbativo sin las limitaciones usuales a valores pequeños de la resistividad y viscosidad. Los efectos combinados de "tearing" y de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se investigaron en forma numérica, usando un método matricial con diferencias finitas para calcular las tasas de crecimiento como función del número de Lundquist S , el número de Mach-Alfvénico M_A y el número de Prandtl magnético P_m . Los principales resultados obtenidos son:

i) En configuraciones con $v_{z0}=0$ ($M_A=0$) se obtienen tasas de crecimiento que se comparan favorablemente con los de trabajos previos. El flujo de estancamiento $v_x=ax$, $v_y=-ay$ tiene un claro efecto estabilizante. Para valores de $S < 12.25$ la configuración se estabiliza completamente. La viscosidad también reduce las tasas de crecimiento.

ii) Cuando $P_m=1$ las escalas de longitud de la láminas iniciales de corriente y de vorticidad son iguales. El valor de M_A determina dos regiones de inestabilidad bien diferenciadas, en donde domina la "tearing" o bien la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (con tasas de crecimiento que son mayores). Para $M_A < 1$ domina el modo "tearing", que es estabilizado por la Kelvin-Helmholtz a medida que crece M_A . En cambio, para $M_A > 1$ la Kelvin-Helmholtz es dominante, pero es estabilizado a su vez por la "tearing". En consecuencia, la máxima estabilización se produce para valores de M_A que son del orden de $M_A \sim 1$.

iii) Las soluciones con $P_m \neq 1$, $M_A \neq 0$ y $S=50$ muestran que para $P_m < 1$ domina la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, mientras que la "tearing" es dominante cuando $P_m > 1$.

En el caso de una lámina de corriente en equilibrio difusivo, se confirmó numéricamente la dependencia de la tasa de crecimiento con el número de Hartmann $H_a = S/P_m^{1/2}$.

Agradecimientos. Este trabajo se realizó con el sostén del subsidio PID-BID 0594/92 del CONICET, y el apoyo del INFIP. Ha sido en parte subsidiado por UBA EX092. RMG desea reconocer la ayuda de las agencias FAPESP y CNPQ de Brasil.

REFERENCIAS

- 1 - Furth, H. P., Killeen, J., Rosenbluth, M. N. (1963). Finite resistivity instabilities in a sheet pinch. *Phys. Fluids* 6, 459-484.
- 2 - White, R. B. (1983). Resistive instabilities and field line reconnection, en *Handbook of Plasma Physics Vol. 1*, Eds. M. N. Rosenbluth and R. Z. Sadeev. North Holland.
- 3 - Priest E.R. (1985). The magnetohydrodynamics of current sheets. *Rev. Prog. Phys.* 48, 995-1090.
- 4 - Phan, T. D., Sonnerup B. U. Ö. (1991). Resistive tearing-mode instability in a current sheet with equilibrium viscous stagnation-point flow. *J. Plasma Phys.* 46, 3, 407-421.
- 5 - Drazin P. G., Reid W. H. (1981). *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- 6 - Gary, J., Helgason, R. (1970). A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems. *J. Comput. Phys.* 5, 169-187.
- 7 - Gratton, F. T., Krasnopolsky, R. (1994). Stability of current sheets: finite dimensional approximations to the spectrum, en *The Solar-Wind-Magnetosphere System*, H.K. Biernat, G.A. Bachmaier, S.J. Bauer and R.J. Rijnbeek eds., 343-357, Austrian Academy of Sciences Press, Viena.