

SOBRE LA DESCARGA ELÉCTRICA DE CUERPOS CARGADOS

ON THE ELECTRIC DISCHARGE OF CHARGED BODIES

J.C. Fernández *

Depto. de Física, Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Buenos Aires
Paseo Colón 850, 2ºP. – (1063) Ciudad de Buenos Aires – Argentina

Recibido: 07/12/12; Aceptado: 24/06/13

La relación entre el modelo electrostático de campo de los cuerpos cargados y el modelo cuasi-estacionario del flujo de corriente en conductores es conceptualmente difícil de asimilar para los estudiantes. En los últimos años hay una tendencia en la literatura para tratar de aclarar esta relación enfatizando las características comunes. En este trabajo se presenta un análisis cuasi-estacionario de la descarga de cuerpos cargados usando el modelo electrostático de coeficientes de potencial para describir el estado inicial y final y el modelo cuasi-estacionario de flujo de corriente para describir el intervalo de descarga. Se plantean claramente las hipótesis de los modelos utilizados y sus limitaciones y surge la importancia del concepto estático de capacidad para la descripción del fenómeno de la descarga. Se espera que ejemplos de este tipo ayuden a los estudiantes a asimilar los modelos subyacentes, sus limitaciones e interrelaciones.

Palabras clave: descarga eléctrica, modelo electrostático, modelo cuasi-estacionario, capacidad.

The relationship between the field electrostatic model of charged bodies and the quasi-stationary model of current flow in conductors is conceptually difficult to grasp for students. In the last years there is a trend in the literature to try to clarify this relationship stressing the common features. In this work we present a quasi-stationary analysis of the discharge of charged bodies using the electrostatic model to describe the initial and final states and the quasi-stationary current flow model to describe the discharge interval. The hypotheses and limitations of the models used are clearly presented and the importance of the static concept of capacity in the description of the discharge phenomenon arises. It is hoped that examples of this type help students to understand the underlying models, their limitations and interrelations.

Keywords: electrical discharge, electrostatic model, quasi-stationary model, capacity.

I. INTRODUCCIÓN

En cursos de electricidad básica y de electromagnetismo se presenta un modelo de campo para describir los fenómenos electrostáticos. Este modelo es habitualmente el primer modelo para los estudiantes y es lógico, claro y describe múltiples situaciones, lo que lleva a muchos estudiantes a tomarlo como un paradigma general de los fenómenos eléctricos. En particular, en este modelo no existe campo eléctrico ni movimiento de carga dentro de los cuerpos conductores, y la presencia de campo en el entorno de una partícula cargada genera sobre ella una fuerza coulombiana que está asociada con una aceleración de acuerdo a las leyes de la mecánica clásica.

Cuando luego se presenta el modelo de flujo de corriente estacionaria o continua, surge que hay campo dentro de los cuerpos conductores y hay movimiento de carga. La mayoría de las presentaciones usan como imagen o paradigma a los conductores metálicos, donde los portadores de carga son los electrones cuasi-libres. A pesar de la presencia de campo no existe una fuerza neta sobre las partículas cargadas, que se mueven a velocidad (macroscópica) constante. Aún cuando en algunas presentaciones se discute una versión simplificada del modelo de Drude de la conducción eléctrica en metales,

esta presentación es cualitativa y no se refleja en las ecuaciones del modelo, cuya ley fenomenológica más importante es la ley de Ohm.

Otra dificultad conceptual surge por la aparición de la noción de fuerza electromotriz (fem), ligada con la presencia de campos no conservativos en partes del circuito, y su relación con la noción previa de diferencia de potencial, que surge en el contexto electrostático pero sigue siendo válida dentro de los conductores del circuito en corriente continua.

Finalmente, la teoría de circuitos para bajas frecuencias utiliza parámetros como la capacidad y la inductancia que se calculan con métodos usados para campos eléctricos y magnéticos estáticos. Todas estas características pueden ser objeto de confusión para el estudiante.

En los últimos años varios autores han publicado artículos⁽¹⁻²⁾ y libros⁽³⁾ destinados a presentar una visión unificada de ambos fenómenos. La introducción de la noción de las cargas superficiales⁽⁴⁻⁶⁾ como fuentes del campo eléctrico responsable del flujo de corriente también ha creado un puente entre las dos descripciones que facilita su comprensión.

Dentro de esta filosofía el presente trabajo trata de describir un problema usando ideas y conceptos del

* e-mail: jcfernan@fi.uba.ar

modelo electrostático y del modelo de flujo de corriente cuasi-estacionaria. En particular, en este trabajo usaremos los llamados coeficientes de potencial para la descripción de las magnitudes físicas estáticas y cuasi-estacionarias de los cuerpos cargados y en descarga.

II. HIPÓTESIS Y MODELOS

La hipótesis básica que liga la situación electrostática con la de circulación de corrientes, es que siempre que exista una diferencia de potencial (ddp) entre partes de un mismo conductor, se producirá un flujo ordenado de carga en el conductor –una **corriente eléctrica**– que se mantiene hasta que la ddp desaparece y el conductor deviene en un volumen equipotencial.

En este contexto, una fuente de fem es un dispositivo que permite mantener por un tiempo esa ddp, para lo cual se requiere aportar energía. Esta energía se transforma en calor dentro del conductor por el **efecto Joule**. Si las corrientes que circulan por el conductor varían lentamente en el tiempo es posible usar el modelo circuital y, en particular, la ley de Ohm para su descripción. Si la variación es rápida, se deben tener en cuenta los fenómenos inductivos y la emisión de radiación electromagnética que escapan del modelo circuital.⁽⁷⁻⁹⁾ Luego de presentar el modelo y realizar los cálculos analizaremos brevemente las limitaciones del modelo propuesto.

Una experiencia básica de este comportamiento consiste en la **descarga de un capacitor** cargado a través de un resistor. Mientras está cargado, el capacitor es la fuente de fem que produce la circulación de corriente en el conductor que llamamos resistor. Es fácil observar la corriente de descarga con un osciloscopio y a partir de las ecuaciones circuitales determinar que su variación en el tiempo sigue la ley:

$$I(t) = \frac{\Delta\Phi}{R} e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC \quad (1)$$

donde $\Delta\Phi$ es la ddp a la que se halla cargado el capacitor, C es su capacidad y R la resistencia del resistor. También puede demostrarse fácilmente que la energía electrostática inicial:

$$U_E = \frac{1}{2} C \Delta\Phi^2 \quad (2)$$

se convierte completamente en calor por efecto Joule:

$$U_J = \int_0^{\infty} R I^2(t) dt = U_E \quad (3)$$

La descripción electromagnética de esta experiencia se basa en la existencia de la estructura de cuerpos cargados llamada **capacitor**, donde los dos conductores tienen cargas de igual magnitud y de signo opuesto. Sólo en esa situación la ddp entre los conductores es proporcional a la carga (en valor absoluto) que hay sobre los conductores. La constante de proporcionalidad es la capacidad del capacitor. En la práctica se asegura que la estructura forme un capacitor mediante la forma en que se lo carga.

Pero, ¿qué ocurre si las cargas en los conductores no satisfacen la condición de un capacitor?

En ese caso se debe usar la descripción mediante los **coeficientes de potencial** o de **capacidad/inducción**, que establecen que en un conjunto de N cuerpos conductores cargados la relación entre las cargas Q_i y los potenciales Φ_i (relativos a una referencia lejana) son lineales.

Podemos escribir esta relación (ver Apéndice):

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j, \quad Q_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Phi_j \quad (4)$$

donde los **coeficientes de potencial** P_{ij} y los **coeficientes de capacidad/inducción** A_{ij} son parámetros que sólo dependen de la geometría del sistema⁽¹⁰⁾, esto es, de la forma y tamaño de los cuerpos conductores y su distribución espacial. Ambas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial y las matrices $[P]$ y $[A]$ son inversas entre sí. En nuestro caso consideramos que todos los cuerpos, salvo los dos cargados y aislados, se hallan al potencial de referencia, que se toma igual a cero. Entonces nos queda ⁽¹¹⁾:

$$Q_1 = A_{11} \Phi_1 + A_{12} \Phi_2 \quad (5)$$

$$Q_2 = A_{21} \Phi_1 + A_{22} \Phi_2$$

que podemos invertir para obtener:

$$\Phi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 \quad (6)$$

$$\Phi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2$$

Demostramos en el Apéndice que, si y sólo si las cargas de los cuerpos son iguales y de signo opuesto:

$$Q_1 = Q, \quad Q_2 = -Q$$

la estructura es un capacitor de capacidad C :

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{1}{P_{11} - 2P_{12} + P_{22}} \quad (7)$$

III. EL EJEMPLO

Nos preguntamos si la descarga entre cuerpos cargados que **no cumplen** la condición de constituir un capacitor se puede describir con una ley sencilla como la obtenida para la descarga de un capacitor.

Para responder a esta pregunta y ejemplificar las ideas de la Sección precedente, planteamos el siguiente ejemplo.

En el **estado inicial** consideramos dos cuerpos conductores eléctricamente cargados y aislados (Figura 1). Sean Q_1 y Q_2 las cargas de los cuerpos y Φ_1 y Φ_2 sus potenciales electrostáticos con respecto a una referencia lejana. No existe ninguna limitación a los valores de carga y potencial de los cuerpos en el estado inicial. Este estado inicial es claramente electrostático.

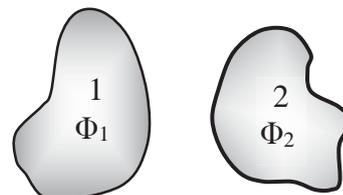


Figura 1. Dos cuerpos cargados y aislados

En un instante (en que tomamos $t = 0$), colocamos un tercer conductor que toca (hace contacto eléctrico) ambos conductores cargados (Figura 2).

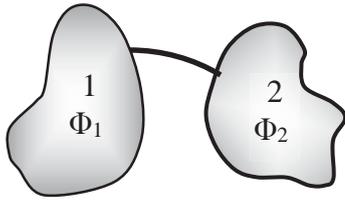


Figura 2. Los cuerpos "conectados" en $t = 0$

Para evitar complicar el modelo, suponemos que este tercer conductor es un alambre cilíndrico de sección muy pequeña, y pequeña longitud. Decimos que, en analogía a la descarga del capacitor, habrá un flujo de carga (o sea una corriente eléctrica) a través del conductor intermedio, que durará mientras los potenciales de los primeros dos cuerpos sean diferentes.

En el **estado final**, el conjunto de los tres cuerpos son un único volumen equipotencial, ya no hay más movimiento de carga y nuevamente nos hallamos en un caso electrostático. Retiramos el conductor intermedio y tenemos nuevamente un problema electrostático de dos cuerpos.

Usaremos entonces el modelo electrostático para describir los estados inicial y final y el modelo cuasi-estático de flujo de corriente para describir el intervalo en que circula corriente por el tercer conductor.

Análisis electrostático: estados inicial y final

En el estado inicial, los potenciales y cargas de los dos conductores satisfacen la relación electrostática:

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_{11}\Phi_1 + A_{12}\Phi_2 \\ Q_2 &= A_{21}\Phi_1 + A_{22}\Phi_2 \end{aligned} \quad (8)$$

La energía del estado inicial se puede escribir (Apéndice, ec. (20)):

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_{ij} \Phi_i \Phi_j \\ &= \frac{1}{2} [A_{11}\Phi_1^2 + A_{22}\Phi_2^2 + 2A_{12}\Phi_1\Phi_2] \end{aligned} \quad (9)$$

En el estado final, ambos cuerpos se hallan al mismo potencial, que llamaremos Φ_0 y tienen cargas Q'_1 y Q'_2 :

$$Q'_1 = (A_{11} + A_{12})\Phi_0, \quad Q'_2 = (A_{21} + A_{22})\Phi_0$$

Estos valores son diferentes de las iniciales debido a la transferencia de carga producida por la circulación de corriente. Como la carga del sistema debe conservarse, tenemos que las cargas finales de los cuerpos satisfacen la ecuación:

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 \quad (10)$$

(admitimos como hipótesis que, si el alambre intermedio es pequeño, la carga superficial que contiene en el estado final es despreciable frente a la carga de los otros cuerpos).

Entonces la condición de conservación de la carga (10) permite calcular el potencial final Φ_0 :

$$\Phi_0 = \frac{Q_1 + Q_2}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} \quad (11)$$

o, en términos de los potenciales iniciales de los cuerpos:

$$\Phi_0 = \frac{(A_{11} + A_{12})\Phi_1 + (A_{12} + A_{22})\Phi_2}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} \quad (12)$$

Ahora podemos calcular las cargas finales de ambos cuerpos:

$$\begin{aligned} Q'_1 &= (A_{11} + A_{12})\Phi_0 = \frac{(A_{11} + A_{12})(Q_1 + Q_2)}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} \\ Q'_2 &= (A_{21} + A_{22})\Phi_0 = \frac{(A_{21} + A_{22})(Q_1 + Q_2)}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} \end{aligned} \quad (13)$$

Podemos comparar el potencial y las cargas del estado final con los correspondientes al estado inicial. Supongamos que hemos elegido Q_1 y Q_2 de manera que:

$$\Phi_1 > \Phi_2 \quad (14)$$

Si en la ec.(12) reemplazamos $(A_{12} + A_{22})\Phi_2$ por $(A_{12} + A_{22})\Phi_1$, que es **mayor**, obtenemos:

$$\Phi_0 < \frac{(A_{11} + A_{12})\Phi_1 + (A_{12} + A_{22})\Phi_1}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} = \Phi_1$$

y entonces: $\Phi_0 < \Phi_1$

Ahora repetimos el procedimiento, pero reemplazando $(A_{11} + A_{12})\Phi_1$ por $(A_{11} + A_{12})\Phi_2$, que es **menor**:

$$\Phi_0 > \frac{(A_{11} + A_{12})\Phi_2 + (A_{12} + A_{22})\Phi_1}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} = \Phi_2$$

y entonces: $\Phi_0 > \Phi_2$

Obtenemos así que el potencial final común de los dos cuerpos es intermedio a los valores iniciales:

$$\Phi_1 > \Phi_0 > \Phi_2 \quad (15)$$

Podemos también analizar cómo se redistribuye la carga en los cuerpos ya que:

$$\begin{aligned} Q'_1 &= (A_{11} + A_{12})\Phi_0 < (A_{11} + A_{12})\Phi_1 = Q_1 \\ Q'_2 &= (A_{21} + A_{22})\Phi_0 > (A_{21} + A_{22})\Phi_2 = Q_2 \end{aligned}$$

En resumen: $Q'_1 < Q_1$, $Q'_2 > Q_2$

y observamos que la transferencia de carga se produce del cuerpo de mayor potencial (que pierde carga) hacia el de menor potencial (que gana carga).

Por lo tanto este ejemplo muestra una situación donde se establece una corriente en un conductor que presenta una diferencia de potencial entre dos de sus partes. La corriente fluye desde la parte a mayor potencial hasta la parte a menor potencial. Esto está de acuerdo con el paradigma básico de circulación de corriente cuando se establece una ddp en un conductor.

Finalmente, podemos calcular la energía electrostática del estado final:

$$U_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_{ij} \Phi_i \Phi_j = \frac{1}{2} (A_{11} + A_{22} + 2A_{12}) \Phi_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{[(A_{11} + A_{12})\Phi_1 + (A_{12} + A_{22})\Phi_2]^2}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}}$$

Se ve que la energía electrostática del estado final es **diferente** de la energía electrostática del estado inicial ec. (9). La diferencia es:

$$U_i - U_f = \frac{1}{2} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} (\Phi_1 - \Phi_2)^2 \quad (16)$$

Pero (Apéndice, ec.(21)) la capacidad del conjunto de dos conductores es:

$$C = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11} + A_{22} + 2A_{12}}$$

y entonces la diferencia de energías es:

$$U_i - U_f = \frac{C(\Phi_1 - \Phi_2)^2}{2} \quad (17)$$

Observamos que esta cantidad es positiva, de modo que hay una pérdida de energía electrostática en el proceso de descarga.

Análisis cuasi-estacionario de la corriente de la descarga

La descarga a través del conductor intermedio puede describirse mediante un modelo cuasi-estático por medio de las leyes circuitales siempre que las corrientes involucradas no varíen muy rápidamente en el tiempo, como justificamos al final de estos cálculos.

En tal caso podemos plantear las siguientes hipótesis del modelo:

1. durante la descarga es posible definir la relación entre los potenciales y las cargas de los conductores (que dependen del tiempo) mediante la coeficientes de capacidad/inducción:

$$Q_1(t) = A_{11}\Phi_1(t) + A_{12}\Phi_2(t)$$

$$Q_2(t) = A_{21}\Phi_1(t) + A_{22}\Phi_2(t)$$

2. la corriente que circula por el conductor intermedio puede describirse por la ley de Ohm:

$$I(t) = \Delta\Phi(t)/R$$

donde $\Delta\Phi(t)$ es la ddp entre los extremos del conductor, que coincide con la ddp entre los cuerpos extremos de la cadena;

Como la corriente que fluye por el conductor intermedio está ligada a la variación de la carga en los cuerpos extremos de la cadena, podemos establecer la relación cuantitativa mediante la ecuación de continuidad que surge de la conservación de la carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$$

Recordamos que en esta ecuación $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ es el vector densidad de corriente y $\rho(\mathbf{r},t)$ es la densidad de carga eléctrica.

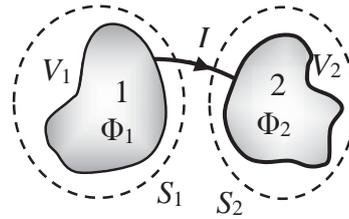


Figura 3. Análisis de la ec. de continuidad

Si integramos la ecuación de continuidad sobre sendos volúmenes V_1 y V_2 que encierran a cada cuerpo, tenemos:

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) dV = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

La integral de superficie es la corriente I que atraviesa esa superficie, y la integral de volumen es la carga encerrada. Como la corriente sale de S_1 y entra a S_2 el flujo es positivo en el primer caso y negativo en el segundo, y tenemos para cada cuerpo:

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} + I(t) = 0, \quad \frac{dQ_2(t)}{dt} - I(t) = 0$$

Estas ecuaciones pueden escribirse, usando la descripción de los coeficientes de capacidad/inducción para expresar la carga de cada cuerpo y la ley de Ohm para expresar la corriente en el conductor intermedio:

$$A_{11} \frac{d\Phi_1(t)}{dt} + A_{12} \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = -I(t) = -\frac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{R}$$

$$A_{12} \frac{d\Phi_1(t)}{dt} + A_{22} \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = I(t) = \frac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{R}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales lineales en los potenciales de los cuerpos se puede resolver para obtener:

$$\Phi_1(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t/\tau}$$

$$\Phi_2(t) = \alpha_1 - \alpha_2 \frac{A_{11} + A_{12}}{A_{12} + A_{22}} e^{-t/\tau}$$

donde:

$$\tau = R \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11} + A_{22} + 2A_{12}} = RC \quad (18)$$

y C es la capacidad del par de cuerpos conductores, de acuerdo a la expresión (21) del Apéndice.

α_1 y α_2 son constantes de integración que pueden calcularse aplicando las condiciones de borde del problema, que son los potenciales en el estado inicial y final del sistema. Así:

$$t = 0: \begin{cases} \Phi_1(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = \Phi_1 \\ \Phi_2(0) = \alpha_1 - \alpha_2 \frac{A_{11} + A_{12}}{A_{12} + A_{22}} = \Phi_2 \end{cases}$$

de donde podemos obtener los valores de las constantes:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{(A_{11} + A_{22})\Phi_1(0) + (A_{12} + A_{22})\Phi_2(0)}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} = \Phi_0 \\ \alpha_2 = \frac{A_{12} + A_{22}}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}}(\Phi_1(0) - \Phi_2(0)) \end{cases}$$

Se puede demostrar que la condición de borde para $t \rightarrow \infty$ es redundante.

Finalmente, la solución cuasi-estática para la evolución de los potenciales de los cuerpos es:

$$\Phi_1(t) = \Phi_0 + \frac{(A_{12} + A_{22})(\Phi_1 - \Phi_2)}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} e^{-t/\tau}$$

$$\Phi_2(t) = \Phi_0 - \frac{(A_{12} + A_{11})(\Phi_1 - \Phi_2)}{A_{11} + 2A_{12} + A_{22}} e^{-t/\tau}$$

$$\tau = R \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11} + A_{22} + 2A_{12}} = RC$$

donde $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(0)$.

Observamos que la descarga se verifica con la misma forma matemática que la descarga del capacitor que formarían los dos cuerpos si hubieran sido cargados con cargas de igual magnitud y signo opuesto.

Recordamos que en nuestro ejemplo por hipótesis las cargas iniciales de los cuerpos son cualesquiera y del mismo signo.

La corriente que pasa por el conductor intermedio surge de aplicar la ley de Ohm:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{R} \\ &= \frac{A_{22} + 2A_{12} + A_{11}}{R(A_{11} + 2A_{12} + A_{22})} (\Phi_1(0) - \Phi_2(0)) e^{-t/\tau} \\ &= \frac{(\Phi_1(0) - \Phi_2(0))}{R} e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

y es una típica corriente de descarga de un capacitor.

La conservación de la energía

En el análisis electrostático de los estados inicial y final habíamos obtenido una pérdida de energía electrostática del sistema de cuerpos cargados. En esta parte hallamos la energía que se convierte en calor por efecto Joule. La potencia de pérdidas por efecto Joule en la resistencia asociada en nuestro modelo al conductor intermedio es:

$$P_J = RI(t)^2$$

y entonces la energía perdida por efecto Joule durante toda la descarga será:

$$U_J = \int_0^{\infty} P_J(t) dt = R \int_0^{\infty} I(t)^2 dt$$

$$\begin{aligned} U_J &= \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau(\Phi_1 - \Phi_2)^2}{2R} \\ &= \frac{C(\Phi_1 - \Phi_2)^2}{2} \end{aligned}$$

expresión que coincide con la diferencia entre las energías electrostáticas inicial y final hallada en la ec. (17).

Nuestro análisis cuasi-estático establece que la disminución de energía electrostática del sistema durante la descarga se debe a la conversión de energía eléctrica en calor por efecto Joule.

Limitaciones del modelo

Los modelos circuitales de descarga de un capacitor y el modelo general de descarga de cuerpos presentado en este trabajo requieren que la resistencia del resistor sea suficientemente grande por dos motivos:

- cuando hay una corriente variable en el tiempo en un circuito, la inductancia L presente en el mismo genera una caída de tensión $L di/dt$ que es tanto mayor cuanto más rápido varía la corriente. En ambos modelos hay un salto de la corriente en $t = 0$ desde cero a $\Delta\Phi_{12}/R$ (que es pequeña cuanto mayor es R) y luego la variación exponencial descrita por la constante de tiempo $\tau = RC$ [ec. (18)], que varía más lento cuanto mayor es R .⁽⁷⁾
- también, cuando la corriente varía en el tiempo en un circuito, éste se comporta como una antena y emite radiación electromagnética, que transporta potencia. Puede demostrarse que la potencia emitida es proporcional al cuadrado de la derivada segunda de la corriente respecto del tiempo.^(8-9,12-13) Cuando la corriente es armónica –varía como $\cos(\omega t)$ – la potencia es proporcional a ω^4 . En nuestro caso, donde hay una caída exponencial, debemos tener en cuenta las armónicas significativas de la representación de Fourier de la corriente en función del tiempo. Para una función $e^{-t/\tau}$ se encuentra de tablas que la representación de Fourier es proporcional a $1/(1 + \omega^2\tau^2)$. Esta función de ω tiene forma de media campana con su máximo en el origen $\omega = 0$. El contenido de frecuencias se extiende a todos los valores, pero podemos acotar las más significativas por el ancho para el cual la función es, digamos, 1/10 del valor máximo. Este punto corresponde a la frecuencia cuya contribución a la corriente es 1/10 del máximo. Entonces:

$$1 + \omega_M^2\tau^2 = 10 \Rightarrow \omega_M = 3/\tau = 3/RC$$

Se ve que cuanto mayor sea R menor será la frecuencia máxima significativa de la corriente y por lo tanto, menor la potencia radiada por el circuito.

Este resumen puede ser útil para indicar al estudiante las limitaciones de los modelos cuasi-estacionarios y que se pueden producir fallas o comportamientos no esperados de un diseño eléctrico o electrónico por no

considerar que en la práctica deben tenerse en cuenta estos “efectos secundarios” que muchas veces no son tan secundarios como se presenta en la literatura.

IV. CONCLUSIONES

Un sencillo cálculo permite generalizar la ley de descarga de un capacitor a la circulación de corriente entre dos cuerpos cargados en forma general y ejemplifica:

1. la existencia de una corriente eléctrica en un conductor en el que se ha establecido una ddp;
2. que esta ddp actúa como fuente de fem mientras existe;
3. que los estados inicial y final pueden describirse adecuadamente usando parámetros electrostáticos (los coeficientes de capacidad/inducción y la capacidad del conjunto de dos conductores);
4. que el transitorio en el que circula la corriente puede describirse adecuadamente usando parámetros cuasi-estacionarios (la resistencia del conductor intermedio y la ley de Ohm);
5. que se conserva la energía del sistema ya que toda la energía electrostática que se “pierde” en la descarga se transforma en calor por efecto Joule, estableciendo un nuevo nexo entre la descripción electrostática y la cuasi-estacionaria de flujo de corriente.

Se han señalado además las limitaciones que posee este modelo por efectos no incluidos en la descripción.

Es esperable que más ejemplos de este tipo ayuden al estudiante a comprender la relación entre ambas descripciones de fenómenos básicos de la electricidad.

V. APÉNDICE – Coeficientes de potencial y de capacidad/inducción

Sea un conjunto de N cuerpos conductores cargados con cargas Q_i . Este sistema crea un potencial electrostático $\Phi(\mathbf{r})$ que sobre cada conductor adopta el valor Φ_i . Entonces se puede escribir:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j \quad (19)$$

Los **coeficientes de potencial** P_{ij} son parámetros que dependen solamente de la geometría del sistema, es decir, de la ubicación de los cuerpos y su forma, pero no de los valores de las cargas o de los potenciales de estos cuerpos. Por razonamientos energéticos se puede demostrar que⁽¹²⁻¹³⁾:

$$\begin{aligned} P_{ij} &> 0 \\ P_{ij} &= P_{ji} \\ P_{ii} &> P_{ij} \end{aligned}$$

La relación lineal (19) entre potenciales y cargas se puede invertir para obtener:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Phi_j$$

en términos de los llamados **coeficientes de capacidad/inducción** A_{ij} . Habitualmente los elementos diagonales A_{ii} se denominan coeficientes de capacidad y

los elementos no diagonales A_{ij} ($i \neq j$) se denominan coeficientes de inducción. Estos coeficientes cumplen las propiedades:

$$\begin{aligned} A_{ii} &> 0 \\ A_{ij} &= A_{ji} \\ A_{ij} &\leq 0 \end{aligned}$$

En términos de estos coeficientes la energía de un sistema electrostático se puede escribir:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N A_{ij} \Phi_i \Phi_j \quad (20)$$

En el caso de un sistema de dos cuerpos cargados con cargas de igual magnitud y signos opuestos (capacitor) se puede escribir:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 = (P_{11} - P_{12}) Q \\ \Phi_2 &= P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 = (P_{21} - P_{22}) Q \end{aligned}$$

de donde podemos definir el parámetro capacidad, independiente de las cargas y potenciales de los cuerpos conductores, en términos de los coeficientes de potencial:

$$C = \frac{Q}{|\Phi_1 - \Phi_2|} = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}}$$

o invirtiendo el sistema lineal podemos expresar la capacidad en términos de los coeficientes de capacidad/inducción:

$$C = \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{11} + A_{22} + 2A_{12}} \quad (21)$$

VI. REFERENCIAS

- [1] - Engelhardt, P. and B. Beichner, Am. J. Phys., **72**, 98-115 (2004).
- [2] - Chabay, R. and B. Sherwood, Am. J. Phys., **74**, 329-336 (2006).
- [3] - Chabay, R. and B. Sherwood, B., “Matter & Interactions II: Electric & Magnetic Interactions”, Wiley, New York (2002).
- [4] - Jefimenko, O., Am. J. Phys., **30**, 19-21 (1962).
- [5] - Heald, M.A., Am. J. Phys., **52**, 522-526, (1984).
- [6] - Jackson, J.D., Am. J. Phys., **64**, 855-870, (1996).
- [7] - Powell, R.A., Am. J. Phys., **47**, 460-462 (1979). Este trabajo analiza la influencia de la inductancia del circuito.
- [8] - Boykin, T. B., Hite, D. and Singh, N., Am. J. Phys. **70**, 415-420 (2002). Este trabajo y el siguiente analizan la emisión de radiación electromagnética por un circuito.
- [9] - Choy, T.C., Am. J. Phys. **72**, 662-670 (2004).
- [10] - Las nociones de los coeficientes de potencial y de capacidad/inducción fueron introducidas por Maxwell en su *Treatise* de 1873 (p.89).
- [11] - Admitimos que las cargas de los cuerpos son positivas, lo que conduce a que sus potenciales también sean positivos.
- [12] - Wangsness, R., “Campos Electromagnéticos”, Limusa-Noriega Editores, México (2001).
- [13] - Lehner, G., “Electromagnetic Field Theory for Engineers and Physicists”, Springer-Verlag, Berlín (2010).