

## CLASIFICACIÓN DINÁMICA DE FLUJOS DE BELTRAMI DYNAMIC CLASSIFICATION OF BELTRAMI FLOWS

**R. González**<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Desarrollo Humano (IDH) – Universidad Nacional De General Sarmiento,  
Juan María Gutierrez 1150 – (1613) Buenos Aires – Argentina.*

Recibido: 02/08/2021; Aceptado: 29/11/2021


Se estudian cuatro configuraciones de flujos de Beltrami (FB) definidos como  $\nabla \times \mathbf{v} = \pm \gamma^{\pm} \mathbf{v}$ , en la que  $\gamma > 0$  es un autovalor y que poseen una dinámica de onda rotante progresiva (ORP) que cumple la *propiedad dinámica (PD)* [1], lo que permite clasificarlos en base a los autovalores que resultan en cada configuración. La primera configuración corresponde a un dominio en volumen infinito sin contornos. El autovalor de clasificación resulta  $\gamma^{\pm} = k$ , donde  $k$  es el módulo del vector de onda que forma un ángulo  $\theta$  con el eje de rotación. Resultan ORP planas de amplitud finita, transversales, dispersivas, circularmente polarizadas y con espectro continuo. La segunda configuración, posee igual dominio que la configuración uno. El autovalor clasificador es  $\gamma_{ph}^{\pm} = 2/|v_{ph\pm}|$  siendo  $v_{ph}$  la velocidad de fase, con  $v_{ph+} < 0$  y  $v_{ph-} > 0$ . Son ORP axi-simétricas o no axi-simétricas a lo largo del eje de rotación, de amplitud finita, no dispersivas y con movimiento entre cilindros concéntricos en los que se anula la velocidad radial. En la tercera configuración el fluido está confinado en un cilindro infinito. El autovalor clasificador es nuevamente  $\gamma_{ph}^{\pm}$  pero resulta discretizado por las condiciones de borde en la pared del cilindro. Se ejemplifica la clasificación para  $v_{ph+} = -0.1$  y tres modos rotantes con  $m = 0, m = 1$  y  $m = 2$ . Son ORP dispersivas de amplitud finita. La cuarta configuración consiste en un flujo roto traslatorio, caracterizado por el número de Rossby  $R_0 (= \frac{U}{a\Omega})$  que es flujo de entrada de un cilindro semi infinito. El autovalor clasificador es  $\gamma_{ph}^{\pm}$  con  $v_{ph\pm} = \mp R_0$ . Son ORP, del mismo tipo que en el cilindro infinito, pero que dependen de  $R_0$ . Se muestra que estas ondas existen sólo en el intervalo  $R_0 \in (0, 0.642]$ . Donde para  $R_0 = 0.642$  se tiene sólo  $m = 1$  y a medida que  $R_0$  decrece surgen sucesivamente los modos  $m = 0$  y  $m \geq 2$ . Se observa que, para un mismo  $R_0$  las ondas de igual signo de frecuencia no intercambian energía. Para cada configuración se analizan las posibilidades y condiciones de interacciones triádicas resonantes.

*Palabras Clave: flujos de Beltrami, ondas rotantes progresivas, interacciones triádicas resonantes.*

We study four configurations of Beltrami flows (BFs) defined as  $\nabla \times \mathbf{v} = \pm \gamma^{\pm} \mathbf{v}$ , where  $\gamma > 0$  is an eigenvalue and which have a progressive rotating wave dynamics (PRWs) that satisfies the dynamic property (DP) [1], which allows us to classify them on the basis of the eigenvalues that result in each configuration. The first configuration corresponds to an infinite volume domain without contours. The classifier eigenvalue is  $\gamma_{ph}^{\pm} = 2/|v_{ph\pm}|$  where  $k$  is the modulus of the wave vector that forms an angle  $\theta$  with the rotation axis. The result is a finite-amplitude, transverse, dispersive, circularly polarised, planar PRWs with a continuous spectrum. The second configuration has the same domain as configuration one. The classifying eigenvalue is  $\gamma_{ph}^{\pm} = 2/|v_{ph\pm}|$  with  $v_{ph}$  being the phase velocity, with  $v_{ph+} < 0$  and  $v_{ph-} > 0$ . They are axi-symmetric or non-axi-symmetric along the axis of rotation, of finite amplitude, non-dispersive and with motion between concentric cylinders at which the radial velocity equals zero. In the third configuration the fluid is confined in an infinite cylinder. The classifying eigenvalue is again  $\gamma_{ph}^{\pm}$  but it results discretized by the boundary conditions on the cylinder wall. Classification is exemplified for  $v_{ph+} = -0.1$  and three rotating modes with  $m = 0, m = 1$  y  $m = 2$ . These are finite amplitude dispersive PRWs. The fourth configuration consists of a rotational-translational flow, characterized by the Rossby number  $R_0 (= \frac{U}{a\Omega})$  which is an intake flow to a semi-infinite cylinder. The classifying eigenvalue is  $\gamma_{ph}^{\pm}$  with  $v_{ph\pm} = \mp R_0$ . These are PRWs, of the same type as in the infinite cylinder, but dependent on  $R_0$ . It is shown that these waves exist only in the interval  $R_0 \in (0, 0.642]$ . Where for  $R_0 = 0.642$  one has only the mode with  $m = 1$  and as  $R_0$  decreases the modes  $m = 0$  and  $m \geq 2$  arise successively. It is observed that, for the same  $R_0$ , waves of the same sign of frequency do not exchange energy. For each configuration the possibilities and conditions of resonant triadic interactions are analyzed.

*Keywords: Beltrami flows, rotating progressive waves, resonant triadic interactions.*

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2022.fluidos.1>

 ISSN 1850-1168 (online)

### I. INTRODUCCIÓN

En la continuidad de la investigación de los flujos de Beltrami [1-3] que son aquellos que cumplen la condición  $\nabla \times \mathbf{v} = \pm \gamma^{\pm} \mathbf{v}$ ,  $\gamma > 0$ , analizamos diferentes propiedades que nos permiten ahora, realizar una clasificación de estos, basada principalmente en su dinámica y sus autovalores re-

sultantes. Los flujos aquí tratados, son generados a partir de la rotación del fluido, debido a la fuerza de Coriolis y por ello resultan en ondas rotantes progresivas (ORP), que son soluciones exactas de la ecuación de Euler, aunque en la bibliografía [4] aparecen como perturbaciones infinitesimales que permiten despreocupar el término no lineal de dicha ecuación, ya que no se advierte, que tal término, en este caso, es

\* rgonzale@campus.ungs.edu.ar

nulo.

En la naturaleza, los FB aquí estudiados, se pueden encontrar en flujos rotantes atmosféricos como los tornados o en remolinos marinos. Mientras que son comunes en turbo maquinaria con flujos roto-traslatorios, como por ejemplo en las turbinas instaladas en las represas.

En la sección II, presentamos la *propiedad dinámica* de los FB que muestra que las ORP con iguales autovalores, no intercambian energía y es la clave de dicha clasificación.

En la sección III desarrollamos gráfica, numérica y analíticamente la clasificación de FB en cuatro configuraciones diferentes.

Y en la sección IV sacamos algunas conclusiones.

## II. PROPIEDAD DINÁMICA DE LOS FLUJOS DE BELTRAMI

La *propiedad dinámica* [1], consiste en que los FB generados por rotación ( $\Omega = \Omega z$ ), cumplen una ecuación de onda rotante progresiva (ORP), en el sistema rotante, que es una solución exacta de las ecuaciones de Euler, con las siguientes características

$$\nabla \times \mathbf{v}_B = \pm \gamma^\pm \mathbf{v}_B \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial t} = \pm \frac{\Omega}{\gamma^\pm} \frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial z} \quad (2)$$

$$\sigma^\pm = \mp \frac{2\Omega}{\gamma(k)^\pm} k_z \quad (3)$$

en la que  $\gamma(k)^\pm$  depende de la *configuración* i.e de su geometría, de su simetría y de sus condiciones de contorno. De forma tal que, la combinación de dos FB  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}$  con igual  $\gamma^\pm$ , es también un FB con el mismo autovalor. En efecto

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}) = \pm \gamma^\pm (\mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2}) = \pm \gamma^\pm \mathbf{v} \quad (4)$$

Por lo tanto, en la ecuación de momentos de Euler el término no lineal  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  y esto significa que no hay transferencia de energía entre ambos FB.

Esta característica permite clasificar los FB a partir de la igualdad o diferencia de los autovalores  $\gamma$ , autovalor, que se convierte así, en un *autovalor clasificador*. Por eso, en las cuatro configuraciones que siguen, establecemos, a partir de trabajos previos [1-5], qué son los autovalores  $\gamma$  y que forma adquiere la relación de dispersión resultante al especificarlo en la Ec. (3) y analizamos, por un lado, la clasificación correspondiente y, por otro, las condiciones de existencia de interacciones triádicas resonantes entre modos con diferentes  $\gamma$ .

## III. CLASIFICACIÓN DE LOS FB MEDIANTE SU AUTOVALOR $\gamma$

### Ondas rotantes progresivas en un dominio de volumen infinito y sin contornos

#### A) Ondas Planas

En un trabajo previo [5], mostramos que, en una geometría rectangular, es posible obtener una ORP plana de tipo

Beltrami con un vector de onda  $\mathbf{k}$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje de rotación  $z$ . La Ec. (3) y el autovalor para este caso, satisfacen las siguientes ecuaciones adimensionalizadas:

$$\sigma^\pm = \mp \frac{2}{\gamma^\pm} k_z, \quad \gamma^\pm = k \quad (5)$$

$$\sigma^\pm = \mp 2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

De esta forma el autovalor clasificador es  $k$ , y la frecuencia depende sólo del ángulo  $\theta$ . Esta ORP es transversal, circularmente polarizada, co-rotante ( $\sigma^- > 0$ ) o contra-rotante ( $\sigma^+ < 0$ ), y de espectro continuo, dispersiva y de amplitud finita. En la literatura se trata este tipo de ondas o como una aproximación infinitesimal, y no como una solución exacta de las ecuaciones de movimiento, despreciando el término no lineal [4], o en forma exacta [6], pero, en ambos casos, sin dar cuenta de que el flujo es de tipo Beltrami.

Por lo tanto, los modos pueden clasificarse en dos clases: aquellos con  $\sigma^+$  y el mismo valor de  $k$  para el autovalor  $\gamma^+$  y aquellos con  $\sigma^-$  y el mismo valor de  $k$  para el autovalor  $\gamma^-$  todos en el rango  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (Fig. 1).

La interacción triádica resonante ([7], [8], [9]) entre modos se produce cuando  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  y  $\pm \sigma_1 = \pm \sigma_2 \pm \sigma_3$ . Para modos con distintos  $\gamma_{i=1,2,3}$  estas condiciones se cumplen cuando los vectores de onda de la tríada forman un triángulo escaleno y  $\mp \cos \theta_1 = \mp \cos \theta_2 \mp \cos \theta_3$  debido a la Ec. (6).

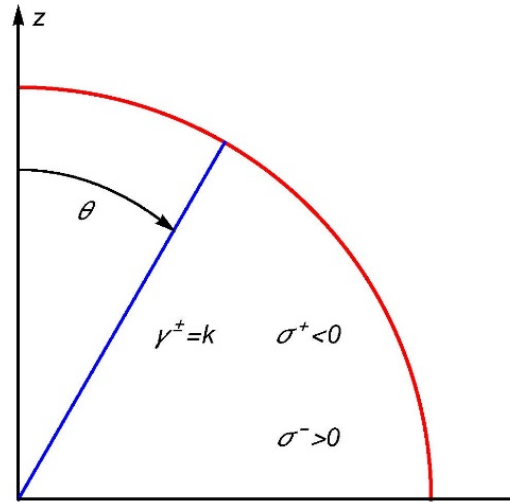


FIG. 1: El arco de circunferencia rojo es la representación polar de los modos de igual  $\gamma$

Dado que el ángulo  $\theta_1$  es intermedio entre  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , entonces, si los tres modos tienen el mismo signo de frecuencia, la última igualdad no se cumpliría por ser el coseno una función decreciente. Por lo tanto, sólo son posibles interacciones resonantes entre modos, con uno de ellos con signo de frecuencia distinto al de los otros dos.

#### B) Ondas rotantes progresivas axi-simétricas y no axi-simétricas en coordenadas cilíndricas

En este caso consideramos una ORP propagándose a lo largo del eje de rotación con un FB en coordenadas cilíndricas [1] (Ecs. (7) - (12)). Al ser el vector de onda axial, la

Ec. (3) adquiere la siguiente forma

$$\sigma^\pm = \mp \frac{2}{\gamma^\pm} k \quad (7)$$

y luego

$$\gamma^\pm = \mp \frac{2k}{\sigma^\pm} = \mp \frac{2}{v_{ph\pm}} = \gamma_{ph}^\pm \quad (8)$$

Por lo tanto, el autovalor clasificador se determina con la velocidad de fase adimensionalizada y lo denominamos  $\gamma_{ph}$  y, aunque no hay una relación de dispersión que ligue a  $\sigma^\pm$  con  $k$  que son independientes, deben cumplirse las restricciones  $k < \gamma_{ph}^\pm$  y  $|\sigma^\pm| < 2$ . Como  $\gamma^\pm > 0$ , de la Ec. (8) resulta que  $\sigma^+ < 0$  y  $\sigma^- > 0$  (contra-rotante y co-rotante). La anulación de la velocidad radial, para un modo dado:

$$\frac{m}{r} J_m(\mu^\pm r) \pm \frac{\mu^\pm k}{\gamma_s} J'_m(\mu^\pm r) = 0, \quad \mu^\pm = \sqrt{\gamma_{ph}^{\pm 2} - k^2} \quad (9)$$

resulta en una serie  $r_n$  de radios que dependen de  $m$ , entre los cuales se produce el movimiento. La ORP es de amplitud finita y no dispersiva.

El caso axi-simétrico se obtiene haciendo  $m=0$ .

En la Fig. 2 se representan los modos con igual  $\gamma_{ph}^\pm$ , autovalor que no depende de  $m$ . Cada  $\gamma_{ph}^\pm$  corresponde a una  $v_{ph\pm}$ , que es la pendiente de una recta en el plano  $\sigma - k$  y sólo los modos representados en una recta, tienen el mismo autovalor y constituyen una clase. Cualquier recta que parta del origen y esté contenida entre  $\sigma^- = 2$  y  $\sigma^+ = -2$  es posible. Ahora, las interacciones triádicas resonantes ocurren cuando

$$k_1 = k_2 + k_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3, \quad m_1 = m_2 + m_3 \quad (10)$$

para  $\gamma_{i,i=1,2,3}$ , diferentes.

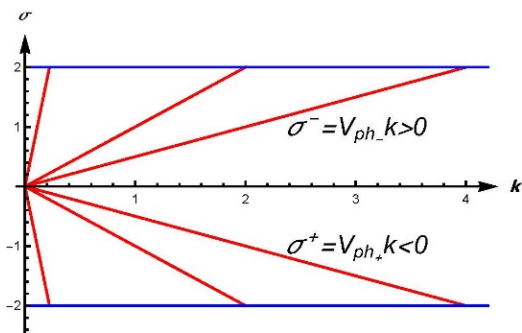


FIG. 2: Las rectas oblicuas, representan modos con velocidades de fase,  $v_{ph\pm} = \mp 9., \mp 1., \mp 0.5$  es decir, de iguales  $\gamma^\pm = 2/9., 2., 4$ .

### Ondas rotantes progresivas en un cilindro infinito

Son ondas del mismo tipo que las descritas en B) pero, a diferencia de aquellas, deben cumplir la condición de contorno de anulación de la velocidad radial en la pared del cilindro. Por lo tanto, se cumplen las Ecs. (7) y (8), pero ahora existe una relación definida por la siguiente ecuación, para  $r = 1$ ,

$$m J_m(\mu^\pm) \pm \frac{\mu^\pm k}{\gamma_s} J'_m(\mu^\pm) = 0 \quad (11)$$

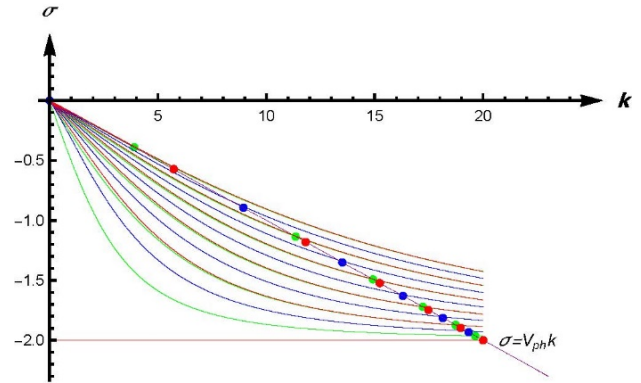


FIG. 3: Los puntos sobre la recta representan modos con velocidades de fase,  $v_{ph+} = -0.1$ . Los puntos verdes corresponden a  $m = 0$ , los azules a  $m = 1$  y los rojos a  $m = 2$ .

Debido a la Ec. (11), los autovalores  $\gamma_{ph}^\pm$  dependen de  $m$ , y, por lo tanto, a diferencia de la configuración 2, la cantidad de autovalores resulta discretizada por  $m$ , pero, a su vez, para cada  $m$ ,  $\gamma_{ph}^\pm$  depende de  $k$  en forma continua.

Como en B, los modos de igual autovalor se encuentran sobre una recta de velocidad de fase constante, pero están representados por los puntos de intersección de esta recta con los gráficos que resultan de las Ecs. (7) y (11) para dicha velocidad de fase.

De acuerdo con el criterio de clasificación, estos modos no intercambian energía. Los modos con diferentes autovalores, que sí intercambian energía, pueden ser tratados, por ejemplo, mediante interacciones triádicas resonantes, que, en este caso, deben cumplir la Ec. (10).

En la Fig. 3, la recta contiene a los pares  $(k, \sigma)$  con igual velocidad de fase, es decir, por la Ec. (8), con igual autovalor  $\gamma_{ph}^\pm$ .

Para  $\sigma^+ < 0$  la cantidad de modos con igual  $\gamma_{ph}^+$  varía de uno con  $\gamma_{ph}^+(m = 0, i = 1) = 2.40483$ , correspondiente a la mayor velocidad de fase  $v_{ph+} = -0.831$ , donde  $i$  indica el número de sub-modo de  $m = 0$  a un número infinito numerable de sub-modos de diferentes  $m$ , a medida que  $|v_{ph\pm}| \rightarrow 0$ . Un análisis similar puede hacerse para  $\sigma^- > 0$ .

### Ondas rotantes progresivas en un cilindro semi infinito con un flujo de entrada roto- traslatorio

En este caso, el flujo de entrada al tubo semi infinito, es un FB axi-simétrico con autovalor  $\gamma = \frac{2\Omega}{U}$  superpuesto a una rotación y una traslación axiales de valores  $\Omega$  y  $U$  respectivamente [1, 2, 6], que adimensionalizado con el radio  $a$  del tubo resulta  $\gamma = \frac{2\Omega a}{U} = \frac{2}{Ro}$ . Por lo tanto, la Ec. (7) de las ORP resulta,

$$\sigma^\pm = \mp Rok \quad (12)$$

y  $v_{ph\pm} = \mp Ro$  Entonces las características de las ORP son las mismas que las de la configuración 3, pero ahora dependientes del número de Rossby.

La asimetría de las curvas con  $m \neq 0$  de la Fig. 4, que representa la relación  $\sigma^\pm(Ro)$  determinada por las Ecs.

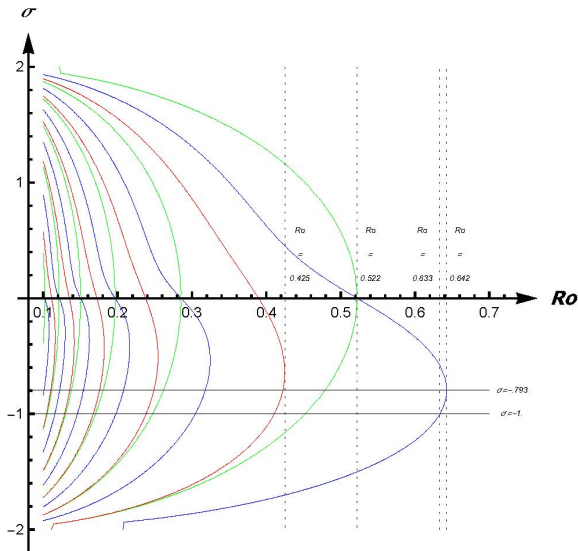


FIG. 4: Las curvas verdes corresponden a  $m = 0$ , las azules a  $m = 1$  y las rojas a  $m = 2$ .

(9) y (12), se debe a la mayor inercia del flujo contrarotante con respecto al co-rotante, siendo el modo  $m = 1$  el de mayor inercia. Las ondas existen sólo en el intervalo  $Ro \in (0, 0.642]$  y el primer modo que surge para  $Ro$  decrecientes, es el de  $m = 1$  para  $Ro = 0.642$ , luego el  $m = 0$  para  $Ro = 0.522$  y  $m = 2$  para  $Ro = 0.425$ . Luego van apareciendo los modos y sub-modos en orden creciente de  $m$ . Para  $m = 1$  y  $Ro = 0.633$ , resulta  $\sigma^+ = -1$ , que es estacionario en el sistema inercial.

Trazando rectas verticales para un dado  $Ro$  las intersecciones con las curvas con  $\sigma^+ < 0$  por un lado y con las curvas con  $\sigma^- > 0$  por otro, nos dan los puntos que representan a los modos de igual velocidad de fase ( $v_{ph+}$  o  $v_{ph-}$ ) decir de igual autovalor ( $\gamma^+$  o  $\gamma^-$ ) definiendo entonces las clasificaciones. Lo ejemplificamos en la Fig. 5 para  $Ro = 0.1$  y los modos con  $m = 0, 1, 2$ .

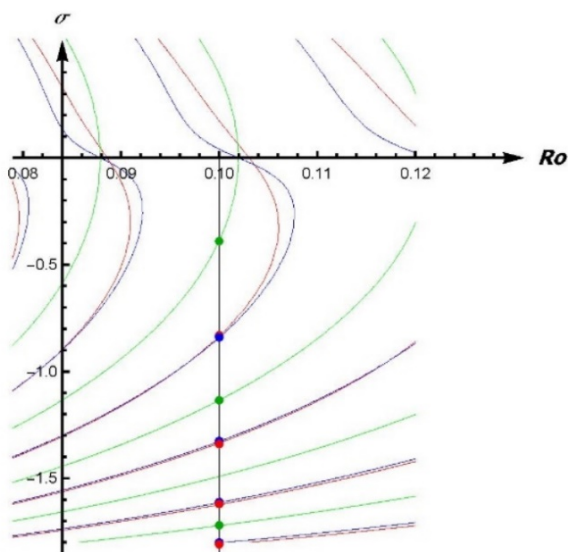


FIG. 5: Los puntos sobre la recta representan modos con velocidad de fase,  $v_{ph+} = -0.1$ . Los puntos verdes corresponden a  $m = 0$ , los azules a  $m = 1$  y los rojos a  $m = 2$ .

Una consecuencia de la propiedad dinámica entonces es

que, para un dado  $Ro$  los modos con igual signo de frecuencia, como los de la Fig. 5, no intercambian energía. Pero, si interactúa una onda de frecuencia negativa con otra u otras de frecuencia positiva, sí puede darse un intercambio de energía.

#### IV. CONCLUSIONES

Los FB estudiados aquí, caracterizados por las Ecs. (1) - (3), son ondas progresivas, soluciones exactas de la ecuación de Euler. Por lo tanto, los autovalores  $\gamma^\pm$  dependen de las características de la onda, determinadas por la geometría, la simetría y las condiciones de contorno de cada configuración.

La Propiedad Dinámica de los FB, determina que la interacción de ondas con igual autovalor (no sólo en valor sino también en signo) no intercambian energía. Esto nos permitió utilizar al autovalor, como *clasificador* de estas ondas.

Los autovalores son  $\gamma^\pm = k$  para la configuración 1 de geometría rectangular y  $\gamma_{ph}^\pm = \mp \frac{2}{v_{ph\pm}}$  para las restantes tres configuraciones con geometría cilíndrica, con valores continuos en las configuraciones 1 y 2, y discretos en las 3 y 4.

Esto nos permitió analizar las posibilidades de interacción de ondas con intercambio de energía en cada configuración, en función de  $k$ ,  $v_{ph\pm}$  y  $\sigma^\pm$  utilizando métodos analíticos, gráficos y numéricos.

Por ejemplo, no hay intercambio de energía entre modos con igual signo de frecuencia en los siguientes casos:

- I. modos de igual  $k$  en la configuración 1 (Fig. 1),
- II. modos con igual velocidad de fase en la configuración 2 (Fig. 2),
- III. modos que resultan de la intersección de las rectas con igual velocidad de fase y curvas de la relación de dispersión en la configuración 3 (Fig. 3),
- IV. modos que resultan de la intersección de las rectas  $Ro = \text{Constante}$  con las curvas de la relación  $\sigma^\pm(Ro)$  en la configuración 4 (Fig. 4).

Vale decir que la igualdad de autovalores incluye tener el mismo signo como supra índice de forma que  $\gamma^+ \neq \gamma^-$  aunque sus valores fueran idénticos.

Asimismo, en función de los mismos parámetros, se establecieron las condiciones de interacción triádica resonante para las cuatro configuraciones.

Una mención especial merece la configuración 4 con potenciales aplicaciones a flujos roto traslatorios, como, por ejemplo, los que ocurren en los conductos de turbinas hidráulicas. La característica central que resulta es que, en el rango en que existen,  $Ro \in (0, 0.642]$ , la cantidad de modos para cada  $Ro$  que se puede obtener a partir de la intersección de la recta  $Ro = \text{constante}$ , con las curvas de la relación  $\sigma^\pm(Ro)$  (Figs 4 y 5) aumenta a medida que  $Ro$  disminuye. Pero de tal forma que los tres primeros modos con  $m = 1, 0, 2$  en ese orden, aparecen recién entre  $Ro = 0.642$  para  $m = 1$  y  $Ro = 0.425$  para  $m = 2$ . Y tanto el resto de los sub-modos de estos modos, como los modos con  $m > 2$

y sus sub-modos, aparecen para  $Ro < 0.425$  y también separados entre sí, aunque con una separación que tiende a cero a medida que  $Ro \rightarrow 0$ , de modo que la cantidad de modos, para un mismo  $Ro$ , se vuelve infinita numerable para  $Ro \rightarrow 0$ . Esto, junto a la imposibilidad de intercambio de energía para modos con el mismo signo de frecuencia, y el mismo  $Ro$ , hace prever una menor cantidad de interacciones que pudiesen desestabilizar la configuración alcanzada. Todo lo dicho muestra que, por un lado, son posibles estas ORP no axi-simétricas que son FB de amplitud finita en un cilindro y por otro, que las posibles inestabilidades por interacciones entre modos se den para  $Ro \rightarrow 0$ .

Ha sido reportado [10] que no era posible una pérdida de axi-simetría en un flujo roto-traslatorio, pero bajo condiciones experimentales que utilizan un  $Ro = 0.83$  en el que no hay aún ORP.

Hay otras consecuencias, así como preguntas planteadas sobre la estabilidad y las posibilidades de interacción triádicas resonantes, que superan el alcance de este trabajo y son motivo de investigación. Pero es importante señalar que finalmente, estas cuestiones están claramente vinculadas con los autovalores y que estos a su vez dependen de los parámetros de las ondas, por lo que en definitiva son estos parámetros, que dependen de las configuraciones, los que determinan las posibilidades de estabilidad o inestabilidad o tipos de interacciones. Por ejemplo, si queremos ver las posibilidades de interacción triádica resonante en configuraciones cilíndricas, sabemos que dos ondas con iguales velocidades de fase  $v_{ph2-} = v_{ph3-} = v_{ph}$  decir con iguales autovalores, no intercambian energía. Si planteamos la posibilidad de su interacción resonante con una tercera onda con autovalor diferente, esto no será posible ya que por la Ec. (11), resulta

$$v_{ph1-} = \frac{\sigma_1^-}{k_1} = \frac{\sigma_2^- + \sigma_3^-}{k_2 + k_3} = \frac{k_2 v_{ph2-} + k_3 v_{ph3-}}{k_2 + k_3} = v_{ph}$$

y entonces  $\gamma_{ph1}^+ = \gamma_{ph2}^+ = \gamma_{ph3}^+$  y por lo tanto no intercambian energía.

## REFERENCIAS

- [1] R. González. Dynamics of non-axisymmetric Beltrami flows. *Physics of Fluids* **26**, 114104 (2014).
- [2] R. González, G. Sarasua y A. Costa. Kelvin waves with helical Beltrami flow structure. *Physics of Fluids* **20**, 024106 (2008).
- [3] R. González, A. Costa y E. S. Santini. On a variational principle for Beltrami flows. *Physics of Fluids* **22**, 074102 (2010).
- [4] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics* (Butterworth Heinemann, 1987).
- [5] R. González y E. S. Santini. The dynamics of beltrami-ized flows and its relation with the Kelvin waves. *Journal of Physics: Conference Series* **296**, 012024 (2011).
- [6] B. G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 2000).
- [7] F. Waleffe. The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **4**, 350-363 (1992).

- [8] R. R. Kerswell. Secondary instabilities in rapidly rotating fluids: inertial wave breakdown. *Journal of Fluid Mechanics* **382**, 283-306 (1999).
- [9] P. G. Drazin y W. H. Reid. *Hydrodynamic stability* (Cambridge university press, 2004).
- [10] R. Guarga y J. Cataldo. A theoretical analysis of symmetry loss in high Reynolds swirling flows. *Journal of Hydraulic Research* **31**, 35-48 (1993).